ФЕЛИКС КЛЕЙН

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ВЫСШЕЙ

ЛЕКЦИИ, ЧИТАННЫЕ В ГЕТТИНГЕНСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

ТОМ ПЕРВЫЙ

АРИФМЕТИКА АЛГЕБРА АНАЛИЗ

Перевод с немецкого Д. А. Крыжановского
под редакцией В. Ф. Кагана

Издание второе, дополненное по третьему немецкому изданию

МОСКВА—1933—ЛЕНИНГРАД

FELIX KLEIN

ELEMENTARMATHEMATIK
VOM HÖHEREN STANDPUNKTE AUS

AUSGEARBEITET VON E. HELLINGER

DRITTE AUFLABE

ERSTER BAND

ARITHMETIK. ALGEBRA. ANALYSIS

Für den Druck fertig gemacht
und mit Zusätzen versehen von
FR. SEYFARTH



BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1924

Редакционную работу по этой книге провел **С. А. Каменецкий**. Издание оформил **А. И. Архангельский**. Корректуру держала **Л. А. Левинская**. Наблюдал за выпуском **А. В. Малов**. Рукопись сдана в производство 19/X—1932 г., листы подписаны к печати в апреле—1933 г., книга вышла в свет в сентябре и колич. 10.000 экз. на бумаге формата 82 × 111 1/32, печатных знаков в листе 33.000, листов 29, заказ № 3516 ГТТИ № 294. Уполномоченный Главлита В-21350.

5-я тип. „Пролетарское слово" треста „Полиграфкнига". Москва, Каланчевский туп., 3/5

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

От издательства IX
Предисловие редактора XI
Предисловие автора к первому изданию XXI

Введение

Задача настоящих лекций 1
Указание литературы 3

АРИФМЕТИКА

I. Действия над натуральными числами

1. Введение чисел в школе 7
2. Основные законы арифметических действий 10
3. Логические основы теории целых чисел 13
   Замечания относительно преподавания математики 21
4. Практика счета с целыми числами 23
   Описание счетной машины „Brunsviga" 25

II. Первое расширение понятия о числе

1. Отрицательные числа 32
   К истории отрицательных чисел 36
2. Дроби 41
3. Иррациональные числа 46

III. Особые свойства целых чисел

Роль теории чисел в школьном и университетском преподавании 55
Отдельные вопросы из теории чисел 59
   Простые числа и разложение на множителей . . . . . —
   Обращение простых дробей в десятичные 60
   Непрерывные дроби 62
   Пифагоровы числа. Великая теорема Ферма 70
   Задача о делении окружности на равные части 75
   Доказательство невозможности построения правильного семиугольника циркулем и линейкой 78

IV. Комплексные числа

1. Обыкновенные комплексные числа 85
2. Высшие комплексные числа, в особенности кватернионы . . 89
   Операции над векторами 92

Стр.
3. Умножение кватернионов и преобразование поворотного растяжения в пространстве 101
Изображение векторов в трехмерном пространстве 108
4. Комплексные числа в преподавании 117

V. Современное развитие и строение математики вообще

Два различных ряда эволюций, по которым параллельно развивался математический анализ 119
Краткий обзор истории математики 124

АЛГЕБРА

Введение

Учебники 132
Выяснение главной задачи: применение наглядных геометрических способов решения уравнений 133

I. Вещественные уравнения с вещественными неизвестными

1. Уравнения, содержащие один параметр 133
2. Уравнения с двумя параметрами 135
Классификация уравнений по числу вещественных корней. 140
3. Уравнения с тремя параметрами λ, μ, ν 143
Аппарат для численного решения уравнений 145
Дискриминантная поверхность биквадратного уравнения . . 149

II. Уравнения в области комплексных чисел

A. Основная теорема алгебры 155
B. Уравнения с одним комплексным параметром 158
Геометрическая интерпретация при помощи конформного изображения 159

Примеры

1. Двучленное уравнение 167
Неприводимость; „невозможность“ деления угла на три равные части 171
2. Уравнение диэдра 174
3. Уравнения тетраэдра, октаэдра и икосаэдра 181
4. Продолжение: вывод уравнений 187
5. О решении нормальных уравнений 195
6. Униформизирование нормальных уравнений посредством трансцендентных функций 199
Тригонометрическое решение кубического уравнения . . 201
7. Разрешимость в радикалах 206
8. Сведение общих уравнений к нашим нормальным уравнениям 211
К теории уравнений пятой степени 213

АНАЛИЗ

Стр.

I. Логарифмы и показательные функции

1. Систематика алгебраического анализа 215
2. Историческое развитие учения о логарифме 218
Непер и Бюрги: уравнение в конечных разностях 221
XVII столетие: площадь гиперболы 225
Эйлер и Лагранж: алгебраический анализ 227
XIX столетие: функции комплексного переменного 230
3. Некоторые замечания о школьном преподавании 232
4. Точка зрения современной теории функций 235

II. О гониометрических функциях

1. Теория гониометрических функций в связи с учением о логарифме 244
2. Тригонометрические таблицы 255
A. Чисто тригонометрические таблицы . . . . . —
B. Логарифмо-тригонометрические таблицы 259
3. Применение гониометрических функций 262
A. Тригонометрия, в особенности сферическая тригонометрия . 263
Основные понятия сферической тригонометрии и формулы первой степени 264
Формулы второй степени, собственные и несобственные треугольники 271
Площадь сферического треугольника, дополнительные соотношения сферической тригонометрии 278
B. Учение о небольших колебаниях, в особенности о колебаниях маятника 281
Школьное изложение (скрытый анализ бесконечно-малых) . 283
C. Изображение периодических функций посредством рядов из гониометрических функций (тригонометрические ряды). 286
Приближения, выраженные конечным числом членов ряда . 288
Величина погрешности 294
Сходимость бесконечных рядов 296
Явление Гиббса 299
D. Общее понятие о функции 301
Историческое значение тригонометрических рядов Фурье . 308

III. Исчисление бесконечно-малых в собственном смысле слова

1. Общие замечания относительно исчисления бесконечно-малых. 311
Происхождение исчисления бесконечно-малых и его связь с особенностями наших чувственных восприятий 312
Логическое обоснование исчисления бесконечно-малых посредством понятия о пределе (Ньютон и его последователи до Коши) 316
Введение диференциала (Лейбниц и его последователи) . . 321
Реакция против предельных переходов и бесконечно-малых; исчисление производных Лагранжа 328
О преподавании исчисления бесконечно-малых в школе . . 330

	Стр.
2. Теорема Тейлора	333
Параболы, соприкасающиеся с данной кривой	334
Оценка погрешности по Коши	339
3. Замечания исторического и педагогического характера	349
Учебники	—
Характер нашего изложения	351

ПРИЛОЖЕНИЯ

I. Трансцендентность чисел e и π

Исторические замечания	352
Доказательство трансцендентности числа e	354
Доказательство трансцендентности числа π	361
Трансцендентные и алгебраические числа	370

II. Учение о множествах

1. Мощность множества	373
Счетность рациональных и алгебраических чисел	375
Несчетность континуума	379
Мощность континуумов высших измерений	382
Множества более высоких мощностей	386
2. Расположение элементов множества	390
Типы расположения счетных множеств	391
Непрерывность континуума	392
Инвариантность числа измерений при непрерывном отображении	394
Заключительные замечания о значении и целях учения о множествах	397
Примыкающие к этому замечания о преподавании в школе	399
Приложение I. Развитие реформы школьного преподавания в Германии	401
Приложение II. Дополнительные сведения о математической и дидактической литературе	419

ДОПОЛНЕНИЯ РЕДАКТОРА

I. План II части („Алгебры“)	436
II. О римановых поверхностях	438
Именной указатель	463
Предметный указатель	467

ОТ ИЗДАТЕЛЬСТВА

Наша литература не богата книгами, в которых столь популярный отдел науки, каким является элементарная математика, подвергался бы такому многостороннему и глубокому рассмотрению, какое дает мастерская рука Клейна — одного из крупнейших представителей западной науки, руководившего ее развитием в течение полувека.

В этой книге Ф. Клейн делится с читателем опытом своей многолетней научной и научно-педагогической работы; здесь он приводит в связь целый ряд вопросов, знакомых каждому со школьной скамьи, с вопросами, составляющими предмет тонких специальных исследований.

Не всегда и не всюду мысли Клейна облекаются в общедоступную форму, хотя большая часть мест его книги доступна широкому кругу читателей. Печать неравномерности лежит на этой, как и на других его работах: чувствуется, что много здесь недоработки, много идей как бы брошено вскользь и не развито в должной степени. Издательство, однако, не считало возможным нарушать манеры письма, присущей Клейну. Работа Клейна, является классической, историческая роль ее огромна и читатель вправе требовать, чтобы она была дана ему в том виде, в каком она была написана.

Издательство дает себе отчет и в том, что в книге Клейна немало положений, ошибочных в методологическом отношении. Мировоззрение Клейна носит на себе отпечатки различных влияний, даже отпечатки тех течений философской мысли, (например, механизма), противником которых сам Клейн выступает

Материалистические высказывания его (а таких немало) сплошь и рядом причудливо чередуются с идеалистическими. Выяснить историческую обусловленность этой пестрой картины взглядов, подвергнуть критике неправильные установки автора, и, мало того противопоставить им

целостную картину марксистско-ленинского понимания тех вопросов, о которых пишет Клейн, — такова ближайшая задача нашей критики.

Тот читатель, на которого книга Клейна рассчитана, вряд ли удовлетворился бы, если бы издательство предпослало книге простой перечень взглядов Клейна, которые оно считает ошибочными; в этом он и не нуждается, и такого рода критика была бы здесь, как, впрочем, и в других случаях, неуместна. Для углубленной же и творчески плодотворной критики нужно время.

Мы только что начинаем создавать библиотеку научных работ на русском языке, и ее создание послужит одним из важных условий подготовки новых научных кадров, в которых мы чувствуем сейчас такой острый недостаток.

В числе этих научных работ мы издаем и ряд таких произведений, которые отнюдь не являются марксистскими, а иногда и очень далеки от марксизма, но которые, подытоживая важнейшие течения буржуазной мысли, являются в то же время отправной точкой для углубленной марксистской критики. В числе этих работ книге Клейна принадлежит не последнее место.

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

Лекции, первая часть которых выходит в настоящее время в свет на русском языке во втором издании, были читаны проф. Ф. Клейном в Геттингене в 1907/08 учебном году для будущих учителей средних учебных заведений. Организация этого курса находится в тесной связи с деятельностью Клейна, направленной в последние десять лет к реформированию преподавания математики в средней школе. В чем заключается эта реформа, как она намечается и как осуществляется,—об этом мы поместили подробную статью в предисловии к 1-й части сочинения Бореля-Штеккеля „Элементарная математика"[1]).

Так как настоящие лекции Клейна находятся в тесной связи с этой реформой и ее завершению автор посвящает в последнем издании особое приложение (см. приложение I), то необходимо дать здесь о ней хотя бы краткие сведения.

Германия — страна, в которой классицизм пустил более глубокие корни, чем где бы то ни было, и школа филологического типа (гимназия) с обширными программами по древним языкам имела здесь за собою веками освященные традиции единственной общеобразовательной школы, открывающей двери в высшие учебные заведения. Старая германская гимназия давала по математике и естествознанию только совершенно ничтожные сведения. Наполеоновский разгром вызвал в Германии реформу всех устоев общественной и политической жизни, в том числе, конечно, и реформу школы. Под руководством Гумбольдта были выработаны главным образом Зюверном (J. W. Süwern), новые программы, отводившие много места математике и естествознанию. Планы Гум-

[1]) Проф. Э. Борель, Арифметика и алгебра. В обработке проф Штеккеля. Перевод с немецкого под редакцией приват-доцента Кагана и с приложением его статьи „О реформе преподавания математики в средних учебных заведениях Германии и Франции".

больда-Зюверна не получили осуществления, но программы математики были расширены, а через некоторое время были учреждены так называемые „реальные гимназии“ с одним древним языком, а позже — „высшие реальные училища“, совершенно свободные от древних языков. Однако все правовые преимущества, в том числе и прямой доступ в высшие школы, были сохранены только за классическими гимназиями.

Признать образование, основанное на естествознании и математике, совершенно равноправным с классическим — таково было первое требование реформаторов, возглавляемых Клейном.

Второе основное положение Клейна, которое поддерживали все сторонники реформы, заключалось в тесном сближении теоретических частей с прикладными. Вместе с физиком Рикке Клейн повел в этом направлении широкую пропаганду. Наиболее яркое выражение она получила в сочинении „О прикладной математике и физике“, составленном обоими руководителями движения[1]).

Теперь обратимся к вопросу о программах и методах преподавания математики в средней школе, как их себе представляли руководители реформистского движения. „Вряд ли есть предмет, — говорит Ф. Клейн, — в преподавании которого царила бы такая рутина, как в преподавании математики. Курс элементарной математики вылился в определенные рамки и точно замер раз навсегда в установившихся пределах. От времени до времени по тому или иному поводу одни задачи заменяются другими, исключаются одни параграфы и вводятся другие; но по существу на всем материале школьной математики это почти не отражается. Новые учебники алгебры носят отпечаток алгебры Эйлера, как новые учебники геометрии — отпечаток геометрии Лежандра. Можно подумать, что математика — мертвая наука, что в ней ничто не меняется, что в этой области знания нет новых идей, по крайней мере таких которые могли бы сделаться достоянием не-

[1]) F. Klein und E. Ricke, Ueber angewandte Mathematik und Physik in ihrer Bedeutung für den Unterricht in den höheren Schulen. Leipzig 1900. „Höhere Schule“ — термин, соответствующий нашей „средней школе“ (в отличие от „Hochschule“ — „высшая школа“).

специалистов, предметом общего образования. Между тем это далеко не так. Математика XIX столетия, несомненно, принесла с собою огромный ряд замечательных идей, которые наложили глубокий отпечаток на все отрасли знания и техники, на господствующие философские воззрения, даже, выражаясь подлинными словами Клейна, „на весь строй нашей культуры“. Совершенно недопустимо поэтому, чтобы общеобразовательная школа была целиком чужда всему тому, что составляет подлинное содержание современной математики.

Какое же понятие в современной математике доминирует? Это есть понятие о функции. Изучение функции составляет предмет, можно сказать, всей высшей математики; установление функциональной зависимости между различного рода факторами составляет задачу прикладной математики. Между тем в программу средней школы понятие о функции почти вовсе не входит, о нем вскользь упоминают в тригонометрии, даже аналитическая геометрия, как уверяет Клейн, в немецкой школе преподается так, что понятие о функции остается в тени.

Здесь именно должна начаться реформа. Понятие о функции должно играть основную, так сказать, руководящую роль в курсе средней школы. Понятие это должно быть выяснено учащимся очень рано и должно проникать все преподавание алгебры и геометрии. Сначала нужно выяснить это понятие графически, начиная с простейших частных примеров; затем нужно приводить многообразные примеры функциональной зависимости из повседневной жизни; наконец, нужно изучить простейшие алгебраические функции: линейные, квадратные и т. д., приучить учащихся исследовать ход их изменения, их особенные (критические) точки. При этом нужно заставлять учащихся самих вычерчивать соответствующие кривые, пользоваться клетчатой бумагой и т. д. В конечном результате каждая кривая, каждое алгебраическое выражение должно претворяться в уме юноши в некоторую функциональную зависимость. Приверженцы реформы придумали даже новый термин — „funktionales Denken“; переведем его дословно — „функциональное мышление“, хотя слово „функциональный“ у нас употребляется обыкновенно в ином значении.

Так вот, — развить в юноше способность к функциональному мышлению составляет основную задачу реформы. Клейн подчеркивает при этом, что здесь дело отнюдь не должно сводиться к тому, чтобы дать учащемуся определение функции. „Учеников многому учат, — говорит Клейн, — и немало чего они выучивают; но немногое действительно становится достоянием их ума“. Нужно, чтобы понятие о функции и его значение в математике и в ее элементарных приложениях было вполне усвоено учащимися, — нужно, чтобы оно проникало собою все преподавание в школе.

Но изучение функций, их возрастания и убывания необходимо и естественно приводит к понятию о производной. Это вызывает следующее требование реформаторов: в программу средней школы должны быть внесены элементы высшей математики. В каком объеме, в какой последовательности это должно быть сделано, это должно зависеть отчасти от типа учебного заведения, отчасти от преподавателя; но это должно быть, во всяком случае, сделано. Это мотивируется следующим образом.

Основные понятия диференциального и интегрального исчислений играют в настоящее время такую роль во всех отраслях и приложениях математики, что обойтись без них совершенно невозможно. В механике при определении понятий о скорости, об ускорении, о центробежной силе, во всевозможных отделах физики, которые проходятся в средней школе, мы фактически оперируем производными; почему же не называть их настоящим именем. Клейн высказывает убеждение, что искусственные приемы, к которым прибегают в каждом частном случае, чтобы избежать понятия о производной и об интеграле, только сбивают учащихся, создают в их голове путаницу и даже отнимают много лишнего времени. Было бы гораздо проще и продуктивнее выяснить эти понятия в общем виде, а потом уже пользоваться ими в приложениях. Еще целесообразнее вводить их, так сказать, по требованию этих приложений, но не маскируя, не создавая ложных и чисто внешних упрощений.

Обширные дискуссии, развернувшиеся на почве всех этих положений, не утратили интереса по сей день, но мы лишены возможности приводить их здесь

Однако необходимо указать еще одно требование реформы, которое справедливо выдвигалось как одно из основных положений.

Преподавание должно быть наглядным. Выдвигая это требование со всей настойчивостью, Клейн, однако хорошо понимает, как легко его утрировать, как трудно его провести во всей чистоте; он и останавливается поэтому подробно на выяснении того, что он, собственно, под этим разумеет. Он полагает, что на первых ступенях преподавания надо отказаться от строго логических тенденций; нужно возможно больше наглядных представлений, возможно большее число примеров из повседневной жизни. Особенно ценным Клейн и его приверженцы считают графическое изображение алгебраических функций. Он считает необходимым, чтобы учащиеся сами вычерчивали такого рода изображения, чтобы они широко пользовались клетчатой бумагой, чтобы они знакомились с термометрическими, барометрическими, статистическими кривыми, с графиками железных дорог и т. п. При всем том Клейн настаивает, чтобы в течение последних двух лет обучения логическая сторона дела по возможности достаточно выяснялась. Следующее его положение мы считаем необходимым привести в подлинных его выражениях: „Во всяком случае нужно решительно избегать выдавать за доказательство такого рода соображения, которые решительно не представляют собой такового“.

Итак, отказ от господства филологической школы в пользу изучения естествознания и математики, углубление связи между теоретической и прикладной математикой, введение в преподавание математики функционального мышления, начал диференциального и интегрального исчислений, наглядное обучение и прежде всего широкое применение графических методов — вот те принципы, которые Клейн и его последователи считали необходимым положить в основу реформы преподавания математики в школе. В условиях политической жизни монархической Германии это было весьма прогрессивное движение. Многое из этих тенденций было осуществлено и у нас в советской школе.

В связи с этими взглядами, с борьбой за проведение

их в жизнь Клейн прочел в геттингенском университете ряд курсов для преподавателей. Один из этих курсов и воспроизводят настоящие лекции. В оригинале они первоначально появились в свет в литографированном виде, выдержали даже два литографированных издания. В 1921—1923 гг. издательство Шпрингера в Берлине выпустило в свет собрание математических мемуаров Клейна[1]). Вслед за этим та же фирма приступила к изданию многочисленных лекций Клейна, которые до того существовали только в литографированном виде. Многие из этих лекций представляют выдающийся интерес.

Государственное технико-теоретическое издательство решило выпустить в свет на русском языке наиболее важные из этих изданий, именно „Лекции по неевклидовой геометрии", „Лекции по высшей геометрии" и, наконец, „Элементарная математика с точки зрения высшей" в трех томах. Первый том, посвященный арифметике, алгебре и анализу, был выпущен на русском языке еще в 1912 г. под редакцией пишущего эти строки. Настоящее, второе, русское издание обработано по печатному (3-му) немецкому изданию.

Лекции Клейна представляют собой, несомненно, редкий вклад в учебную математическую литературу. Некоторые главы представляют собой настоящие перлы, тем более ценные, что ни в каком другом сочинении их в подобной обработке нельзя найти: многое заимствовано непосредственно из научных мемуаров, из обширных исторических сочинений, малодоступных или даже вовсе недоступных тому читателю, для которого предназначены лекции Клейна. Мало того, книга интересна отнюдь не только для учителя, а местами, пожалуй, и вовсе не для учителя. Она интересна для всякого лица, заканчивающего высшее математическое образование, для аспиранта — она дает ему такой обзор руководящих идей, проникающий

[1]) F. Klein, Gesammelte mathematische Abhandlungen, in drei Bänden. Bd. I. Liniengeometrie — Grundlegung der Geometrie — Zum Erlangener Programm, Berlin 1921. Bd II. Anschauliche Geometrie — Substitutionsgruppen und Gleichungstheorie — Zur mathematischen Physik. Berlin 1922. Bd. III. Elliptische Funktionen, insbesondere Modulfunktionen, hyperelliptische und Abelsche Funktionen, Rimansche Funnktionentheorie und automorphe Funktionen, Berlin 1923.

все отделы современной математики, какого он не найдет нигде.

Но два замечания мы должны к этому прибавить. Во-первых, книга имеет эту ценность лишь для того, кто подойдет к ней с надлежащими требованиями, так сказать, с надлежащей стороны и с надлежащей подготовкой. Во-вторых, не все части сочинения достаточно уравновешены. На той и другой стороне дела нам необходимо остановиться несколько подробнее.

Понятие об „элементарной математике" вообще очень растяжимое; но Клейн имеет на это совершенно особенный взгляд. В указанной выше статье „О реформе преподавания математики" мы привели принадлежащую Клейну критику различных определений элементарной математики, вернее, его соображения, в силу которых он считает, что ни одно из известных ему определений не выдерживает критики. Он сам признает лишь следующее определение: элементарно все то, что доступно юноше школьного возраста. Но подойдем ли мы именно с этой или с какой бы то ни было другой точки зрения на элементарную математику, даже „с высшей", как сказано в заглавии книги, мы должны будем признать, что не только многие части сочинения, а, пожалуй, и большая часть их не может быть признана элементарной. Ни учение о кватернионах в его связи с механикой, ни уравнения и группы многогранников в их связи с римановыми поверхностями, ни учение о малых колебаниях, о рядах Фурье, об интерполяции не могут быть признаны элементарными. Это отнюдь не уменьшает достоинства книги для тех, кому эти вопросы доступны.

Но это нужно иметь в виду при чтении книги. В некоторых своих частях она требует значительной научной подготовки. И с этой точки зрения нужно сказать, что Клейн при выборе материала для своих лекций не привел их в соответствие с задачами реформы и нуждами преподавателя реформированной школы. Конечно уровень знаний и подготовки преподавателя должен быть гораздо выше того, что составляет содержание его преподавания. И Клейн, считаясь с этим, хочет высоко поднять кругозор преподавателя. Но вряд ли кто-либо признает, что лекции, посвященные, например, алгебре, в общем соответствуют

этой задаче. Мы к этому еще возвратимся, но прежде несколько слов о характере изложения. Здесь мы должны лишний раз подчеркнуть то, что об этом говорит сам автор: лекции не содержат систематического и догматического изложения соответственных дисциплин; они содержат только общий обзор относящихся сюда учений, они имеют в виду ярко осветить их основные моменты, сущность задач, их трудности, слабые места, спорные вопросы. Учиться той или иной дисциплине по этой книге нельзя; для этого существуют руководства, лучшие из которых автор всегда указывает на своем месте. Но в качестве дополнения к руководствам эти лекции особенно ценны в следующем отношении. Авторы догматических сочинений стараются победить те трудности, с которыми связано точное изложение дисциплины. Удается ли им это или нет, — в результате наиболее спорные пункты всегда остаются скрытыми, сглаженными. И даже в тех случаях, когда удается довести ту или иную теорию до полной точности, учащийся часто недоумевает, для чего автору понадобился тот или иной сложный аппарат, те или иные громоздкие рассуждения. Вот эти именно вопросы Клейн и старается осветить, он старается выяснить идею в свете ее исторического развития, в сопоставлении попыток ее разрешения. Но ясно вместе с тем, что, тот, кто станет читать эту книгу без предварительного знакомства с этими вопросами, не найдет в ней того, чего ищет.

Теперь остановимся на отдельных частях настоящего, первого, тома. Первая часть представляет собой обзор современной теоретической арифметики. Кроме разве 3 й части IV главы („Умножение кватернионов и преобразование поворотного растяжения в пространстве"), здесь все очень доступно и может в такой же мере служить введением в теоретическую арифметику, как и дополнением к ней. Читатель должен только помнить, что доказательства нигде не доводятся до конца, что автор выясняет лишь руководящие их идеи.

И даже учение о кватернионах нельзя считать недоступным; оно требует только больше внимания. Этот раздел для преподавателя реформированной школы наиболее интересен.

Иначе обстоит дело со второй частью, с „Алгеброй". Хотя отнесенные сюда автором вещи принадлежат к числу изящных перлов математической литературы, мы считаем, что выбор сделан Клейном — в виду назначения этих лекций — весьма неудачно. Из обширного материала, который представляет алгебра для беседы с будущими учителями, Клейн выбрал вопросы, составлявшие, главным образом, предметы его собственных работ и изложенные отчасти в мемуаре „Geometrisches zur Abzählung der Murzeln algebraischer gleichungen" и частью в книге „Vorlesungen über das Ikosaeder". Что заставило Клейна сделать такой странный выбор? Одна из заветных идей Клейна заключается в том, чтобы слить различные отделы математики в одно целое и чтобы геометрические представления уяснили аналитические теории. Эти идеи, действительно, находят себе замечательное осуществление в разбираемых автором вопросах, но они стоят чрезвычайно далеко от школы, и изучение их вряд ли может принести существенную пользу будущему преподавателю. Мы полагали, что автор отдал здесь дань увлечению собственными работами. Трудно в какой бы то ни было мере связать этот материал с требованиями реформы, с задачами преподавания с подготовкой слушателей, но для студентов и математиков, которые интересуются алгеброй, эти главы представляют глубочайший интерес. Чтение первой главы хотя и потребует от хорошего студента напряжения, но больших затруднений не представит. Иначе обстоит дело со второй главой. Она требует знакомства с римановыми поверхностями, какого мы у студентов и даже аспирантов предполагать не можем. Мы сочли поэтому целесообразным присоединить в качестве приложения к книге небольшую статью о римановых поверхностях, в которой это учение изложено в том объеме, какой необходим для понимания второй главы „Алгебры".

Но и самая руководящая нить, проникающая эту часть книги, может показаться недостаточно опытному читателю неясной. Мы сочли поэтому нужным выяснить также и самый ход идей Клейна в небольшом добавлении, предпосланном статье о римановых поверхностях.

В третьей части, посвященной анализу, Клейн вновь возвращается к основным вопросам и трактует их в высшей

степени доступно. Это, на наш взгляд, лучшая часть сочинения. Так же как и первую часть, мы не можем не рекомендовать ее всем, изучающим математику с действительным интересом к делу. Более того, именно этот отдел дает преподавателю обильный материал как в отношении функционального мышления, так и по вопросу о началах анализа в школе, да и не только в средней школе. С этим отделом очень полезно будет познакомиться всякому, кто у нас преподает математику на рабфаках, во втузах, в университетах.

Пусть некоторые части книги не соответствуют основной ее задаче; пусть недостаточно согласованы различные ее разделы. Книга написана так, как писать умел только Клейн; она, несомненно, найдет много читателей в СССР.

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ.

Настоящее литографированное издание, которое я предлагаю вниманию математических кругов и в особенности преподавателей математики в наших средних учебных заведениях, должно представлять собою, по мысли автора, первое продолжение тех лекций „о преподавании математики в средних учебных заведениях", специально посвященных вопросу об „организации математического преподавания", которые я выпустил в свет в прошлом году вместе с Р. Шиммаком[1]). В этой последней книге был сделан обзор различных **форм**, в которых осуществляется преподавание математики в средней школе; теперь было необходимо присоединить сюда разбор самого **учебного материала**. В этих лекциях я имел в виду представить учителю — или даже более зрелому студенту — содержание и обоснование областей, входящих в круг преподавания, принимая при этом во внимание фактически существующую постановку последнего; я старался подойти к этому с точки зрения современной науки в возможно простой и живой форме. При этом я не имел в виду дать систематическое изложение, как это делают, например, Вебер и Вельштейн; я хотел придать этим лекциям характер эскизов в той самой форме, в какую они выливались, когда я их действительно читал.

На такую программу, которая в данном случае проведена пока лишь для арифметики, алгебры и анализа, я указывал уже в предисловии к упомянутой книге Клейна-Шиммака (апрель 1907 г.); я тогда надеялся, что Шиммак, несмотря на многие препятствия, все же найдет время, чтобы снова взять на себя обработку моих лекций для печати. Но я сам, можно сказать, помешал ему сделать это, так как постоянно пользовался

[1]) См. выноску на стр. 3.

его энергией для работы в других направлениях по интересующим нас обоих педагогическим вопросам. Как бы там ни было, но вскоре выяснилось, что выполнить первоначальный план в короткий срок было неосуществимо; а между тем это казалось желательным в интересах фактического воздействия на вопросы преподавания, стоящие теперь на первом плане. Поэтому я снова прибегнул, как в прежние годы, к более удобному средству — литографированию моих лекций; к тому же мой теперешний ассистент Геллингер (Ernst Hellinger) оказался исключительно умелым помощником в этом деле.

Я должен сказать, что работу, которая выпала на долю Геллингера, отнюдь не следует считать незначительной. Ведь от устного изложения преподавателя, обусловленного всевозможными случайными обстоятельствами, до письменного изложения, в значительной мере сглаженного и обработанного, еще очень далеко. Но только в литографированном издании точность обработки и выдержанность изложения не проводятся с такою строгостью, как это считается необходимым, согласно установившемуся обычаю, для печатных произведений.

Я несколько боюсь определенно обещать, что за этими лекциями последует продолжение этого издания по вопросу о преподавании других отраслей математики и прежде всего геометрии[1]; я хочу только высказать в заключение пожелание, чтобы настоящая книга оказалась полезной тем, что побудит иного учителя нашей средней школы к самостоятельному размышлению о новом, более целесообразном изложении того учебного материала, который он преподает. Исключительно с такой точки зрения надо смотреть на мою книгу, а не считать ее готовым учебным планом; разработку последнего я всецело предоставляю тем, которые сами работают в школе. Если кто-нибудь предполагает, что я когда-либо понимал свою деятельность иначе, то это недоразумение. В частности, учебный план педагогической

[1]) К счастью, оказалось возможным уже в 1909 г. издать „Геометрию" как вторую часть „Элементарной математики с точки зрения высшей".

комиссии Общества германских естествоиспытателей и врачей (так называемая „Меранская программа") [1]) выработан не мною, а лишь при моем участии выдающимися представителями школьной математики.

Наконец, относительно характера изложения в этой книге достаточно будет сказать, что я здесь, как и прежде в подходящих случаях, старался всюду соединять геометрическую наглядность с той точностью, какую дают арифметические формулы; я особенно старался проследить историю возникновения различных теорий, чтобы этим путем выяснить особенности различных способов изложения, которые в современном преподавании постоянно уживаются рядом.

Геттинген, конец июня 1908 г.

Ф. Клейн.

---

[1]) См. статью В. Кагана „О реформе преподавания математики в средних учебных заведениях Германии и Франции". Вступительная статья к русскому изданию книги Борель-Штеккель, Элементарная математика".

ВВЕДЕНИЕ.

В последние годы в среде университетских преподавателей математики и естествознания стал обнаруживаться интерес к вопросу о целесообразной, соответствующей всем потребностям подготовке кандидатов на учительские должности. Это явление замечается сравнительно недавно. До того в течение долгого периода в университетах культивировалась исключительно высокая наука без внимания к тому, что, собственно, нужно школе; об установлении связи между университетским преподаванием и школьной математикой никто не заботился. Но к каким последствиям привела такая практика? Вступая в высшую школу, молодой студент оказывается лицом к лицу с такими задачами, которые совершенно не напоминают ему того, чем он до сих пор занимался; естественно, что все это он быстро и основательно забывает. Когда же он заканчивает университетское образование и становится преподавателем, то он вынужден в качестве учителя преподавать традиционную математику; не будучи в состоянии самостоятельно связать эту задачу с тем, что он слышал в высшей школе, он быстро усваивает старую традицию; университетское же образование остается у него только в виде более или менее приятного воспоминания, не оказывающего никакого влияния на его преподавание.

В настоящее время возникло стремление уничтожить этот двойной разрыв, который, несомненно, был одинаково вреден как для средней, так и для высшей школы. Именно, мы стараемся, с одной стороны, провести через весь материал школьного обучения те идеи, которые отвечают современному развитию науки и общей культуры (к этому мы еще неоднократно будем возвращаться); с другой стороны, мы стараемся в университетском преподавании принять во внимание нужды учителей. В этом именно деле очень полезным средством представляются мне науч-

ные обзоры, к одному из которых мы ныне приступаем. Я имею, следовательно, перед собой не начинающих; напротив, я считаю, что всем вам общий материал важнейших математических дисциплин хорошо знаком. Мне придется неоднократно говорить о задачах алгебры, теории чисел, теории функций, не входя в детали. Вы должны быть со всеми этими вещами до некоторой степени знакомы. Моя задача будет постоянно заключаться в том, чтобы выдвигать взаимную связь между вопросами отдельных дисциплин, которая часто скрадывается в специальных курсах, — чтобы указывать их отношение к вопросам школьной математики. Я полагаю, что этим путем мне удастся значительно облегчить вам достижение той цели, которую вы должны иметь в виду при изучении математики в высшей школе: чтобы позже в вашем собственном преподавании вы сохранили живую связь с той наукой, которая вам здесь преподносится в изобилии.

Позвольте прежде всего представить вам некоторые документы, относящиеся к последнему времени и свидетельствующие о том интересе, который в широких кругах вызывает вопрос о подготовке учителей; эти документы должны составить и для вас ценный материал. В частности эти вопросы очень занимали также последний съезд естествоиспытателей в Дрездене, состоявшийся в сентябре 1907 г., на котором мы, согласно представлению педагогической комиссии, приняли „предложения относительно научной подготовки преподавателей математики и естествознания“. Эти предложения вы можете найти в последней главе общего доклада комиссии [1]), которая с 1904 г. занималась разработкой всего комплекса вопросов обучения математике и естествознанию, а в настоящее время закончила свою деятельность. Я настойчиво прошу вас ознакомиться как с этими предложениями, так и с другими частями этого в высшей степени интересного доклада.

В качестве введения в настоящий курс я хочу сделать вам некоторые более специальные указания, именно, я

[1]) Die Tätigkeit der Unterrichtskommission der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Aerzte, hrsg. von A. Gutzmer (Leipzig und Berlin 1908).

хотел обратить ваше внимание на некоторые полезные для вас сочинения. Три года назад я читал лекции, преследовавшие такую же цель, как и настоящий курс. Мой тогдашний ассистент Р. Шиммак (R. Schimmack) разработал эти лекции так, что первая часть их недавно появилась в печати [1]). В этом сочинении идет речь о различного рода школах, включая и высшие школы, об общем ходе школьного преподавания в них, о взаимной связи между этими школами. Ниже, при случае, мне придется и здесь указывать на изложенные в этом сочинении вопросы, не повторяя их; но тем подробнее я буду здесь, как бы в виде продолжения того же изложения, останавливаться на том, что относится собственно к математике и что имеет то или иное отношение к преподаванию. Касаясь часто преподавательской практики, я основываюсь при этом не на одних только расплывчатых соображениях о том, как это дело могло бы обстоять, или же на собственных старых школьных воспоминаниях; напротив, я нахожусь в постоянном общении с Шиммаком, который в настоящее время преподает здесь в одной гимназии и постоянно осведомляет меня о настоящем положении преподавания, несомненно ушедшем далеко вперед по сравнению с прошлым. В настоящем семестре я намерен изложить „три великие А“: арифметику, алгебру и анализ; продолжение же этого курса в следующем семестре будет посвящено геометрии. Замечу кстати, что в высших учебных заведениях эти три отдела нередко именуются общим названием арифметики; да и вообще мы не раз встретимся с уклонением терминологии, принятой в школе, от той, которая царит в высшем учебном заведении. Только живое общение, как вы видите на этом незначительном простом примере, может привести ко взаимному пониманию.

Во вторую очередь, обращу ваше внимание на обширное сочинение, которое в общем преследует те же

[1]) F. Klein, Vorträge über den mathematischen Unterricht an höheren Schulen. Bearbeitet von R. Schimmack. Teil 1: Von der Organisation des mathematischen Unterrichts. Leipzig 1907. Ниже это сочинение мы будем цитировать под названием „Klein Schimmack“.

цели, какие имею и я в виду; это — „Энциклопедия элементарной математики" Вебера и Вельштейна[1]).

В настоящем семестре нам придется иметь дело с I томом — с „Энциклопедией элементарной алгебры" Вебера. Укажу сейчас же на некоторое различие между этим сочинением и планом настоящего курса. У Вебера и Вельштейна вся система элементарной математики систематически и логически развивается на зрелом математическом языке, доступном студенту, далеко подвинувшемуся в своих занятиях. О том, в каком собственно виде этот материал должен фигурировать в школе, здесь вовсе нет речи. Между тем изложение в школе, выражаясь образно, должно быть **психологическим** а не **систематическим**. Учитель должен быть, так сказать, дипломатом; он должен учитывать и душевные движения юноши, он должен уметь возбудить его интерес, а это будет ему удаваться только тогда, если он будет излагать вещи в наглядной, доступной форме. Лишь в старших классах возможно также и более абстрактное изложение.

Приведем пример. Ребенок никогда не поймет, если мы будем вводить числа аксиоматически, как объекты, не имеющие никакого содержания, над которыми мы оперируем по формальным правилам, установленным нашими собственными соглашениями. Напротив, он соединяет с числами **реальное представление**; они являются для него нечем иным, как количествами орехов, яблок и тому подобных хороших вещей; только в этой форме эти вещи можно передавать в начальном обучении, только в этой форме их и будут в действительности передавать детям. Но и вообще, во всем ходе обучения математике, даже в высшей школе, необходимо всегда указывать на связь между этой наукой и теми интересами, которые занимают

[1]) H. Weber und J. Wellstein, Encyklopädie der Elementarmathematik том I вышел в русском переводе под редакцией В. Ф. Кагана, изд. „Mathesis"; в трех изданиях (последнее в 1912 г.) Госуд. издательством была выпущена в свет I часть II тома. („Арифметика").

После смерти обоих авторов сочинение в оригинале вышло в свет 4-м изданием глубоко переработанное Эпштейном (P. Epstein) см. приложение II. Сочинение цитируется как Вебер-Вельштейн I. *Ред.*

учащегося в повседневной жизни[1]). Это именно имеют в виду новые тенденции, стремящиеся поднять прикладную математику в университете. Впрочем, в школе этим требованием никогда не пренебрегали в такой мере, как в университете. Эти психологические моменты я и намерен особенно подчеркнуть в своих лекциях. Другое различие между книгой Вебера и Вельштейна и моей точкой зрения заключается в разграничении материала школьной математики. В этом отношении Вебер и Вельштейн настроены „консервативно", я же — „прогрессивно". Эти вопросы подробно разобраны в книге Клейн-Шиммак. Мы, которых называют теперь **реформаторами**, стремимся положить в основу преподавания **понятие о функции**, ибо это есть то понятие, которое в течение последних 200 лет заняло центральное место всюду, где только мы встречаем математическую мысль. Это понятие мы желаем выработать при преподавании столь рано, как это только возможно, постоянно применяя графический метод изображения каждого закона системой x—y-ков, которая теперь употребляется при всяком практическом применении математики. Чтобы сделать возможным это нововведение, мы готовы отказаться от многих частей материала, входящего в состав действующих программ; эти вопросы, несомненно, интересны сами по себе; но по общему своему значению и по связи со всей современной культурой они представляются менее существенными. **Сильное развитие пространственных представлений** должно при этом играть первенствующую роль. Обучение в школе должно проникнуть вверх, **в область начал исчисления бесконечно-малых** в такой мере, чтобы молодой человек выходил уже из средней школы во всеоружии того математического материала, без которого будущий естествоиспытатель или страховой деятель совершенно не в состоянии обойтись. В противоположность этим сравнительно современным идеям, Вебер и Вельштейн по существу держатся старого разграничения материала. В настоящих лекциях я имею,

[1]) Эту связь необходимо, конечно, ярко проводить в преподавании не только для вящего его интереса, а в силу того, что именно для отображения действительных соотношений между вещами и объектами повседневной жизни, естествознания и техники эти понятия возникли. *Ред.*

конечно, целью пропагандировать те идеи, которых я придерживаюсь.

Наконец, в третью очередь, я хочу указать вам еще одну весьма любопытную книгу, принадлежащую М. Симону, работающему как и Вебер и Вельштейн, в Страсбурге, именно: „Дидактика и методика счета и математики"; новое издание этой книги только что вышло в свет [1]). Во многих вопросах Симон соглашается с нашими тенденциями, но во многом он с нами решительно расходится. Так как это—личность с ярко выраженным субъективизмом и с горячим темпераментом, то именно этим разногласиям он нередко дает острое выражение. Приведем пример. Предложения педагогической комиссии съезда естествоиспытателей настаивают на одном часе геометрической пропедевтики уже во втором классе, между тем как в настоящее время геометрия начинается только в третьем классе. Вопрос о том, какая собственно система предпочтительнее, дебатируется очень давно, да и в самой школьной практике та и другая система уже не раз сменяли друг друга. Мы имеем пред собой, таким образом, вопрос, о котором, во всяком случае, можно спорить. Между тем Симон категорически заявляет, что позиция, которую комиссия заняла в этом вопросе, „хуже, чем преступление", и, главное, этого своего утверждения он не обосновывает ни единым словом. Таких мест можно было бы указать еще много. В качестве предшественницы названного сочинения укажу еще книгу того же автора — „Методика элементарной арифметики в связи с алгебраическим анализом [2]).

После этого короткого введения обратимся к главному предмету наших занятий.

---

[1]) Max Simon, Didaktik und Methodik des Rechnens und der Mathematik, 2 Auflage, München 1908. Sonderausgabe aus Baumeisters Handbuch der Erziehungs und Unterrichtslehre für höhere Schulen.

[2]) M. Simon Methodik der elementaren Arithmetik in Verbindung mit algebraischer Analysis, Leipzig 1906.

АРИФМЕТИКА.

I. ДЕЙСТВИЯ НАД НАТУРАЛЬНЫМИ ЧИСЛАМИ.

Естественно, что мы начнем прежде всего с основного вопроса всей арифметики, т. е. с действий над целыми положительными числами. Здесь, как и во всем своем изложении, я намерен прежде всего поставить вопрос о том, как этот предмет трактуется в школе, а затем уже займусь исследованием того, что он, собственно, в себе содержит с более глубокой точки зрения.

1. Введение чисел в школе.

Я ограничусь здесь краткими указаниями, так как вы несомненно, еще помните, как вы сами учились этим вещам в школе. Я конечно, отнюдь не имею в виду действительно ввести вас в практику школьного обучения, как это делается на семинарских занятиях в средне-учебных заведениях. Я только приведу материал, который поможет нам ориентироваться в наших критических рассуждениях.

Ознакомить детей с учением о целых числах, приспособляясь к их пониманию, научить их действиям над ними так, чтобы они этим предметом вполне овладели,— в высшей степени трудно и требует многолетних усилий, начиная с первого года обучения вплоть до третьего класса гимназии. Тот способ изложения этих начал, который в настоящее время господствует почти во всех наших школах, можно лучше всего характеризовать словами „наглядно" и „генетически". Это значит, что весь материал разрабатывается постепенно с самого начала на почве хорошо известных, наглядных представлений. В этом заключается коренное отличие от **логического** и **систематического** метода обучения, который практикуется в высшей школе. Весь материал расчленяется приблизительно следующим образом (в точности, конеч-

но, этого указать невозможно). Весь первый год обучения посвящается счету в пределах первых двух десятков, а, примерно, первое полугодие — даже счету в пределах одного десятка. Числа вводятся как числовые образы, составленные из точек, или как количества всевозможных доступных детям предметов. Сложение и умножение объясняется детям и усваивается ими на наглядных представлениях. На второй ступени разрабатывается числовая область от единицы до ста; в этот период обучения, а зачастую еще и раньше, вводятся арабские цифры, выясняется значение места, занимаемого цифрой в числе, и вообще вводится десятичная система. Хочу здесь попутно указать, что установившееся название „арабские цифры“, как и многое в обычной терминологии, исторически неправильно. Эта система счисления в действительности ведет начало от индусов, а не от арабов. Следующая важная задача, относящаяся к этой ступени обучения, есть разучивание таблицы умножения. Сколько составит 5×3 или 3×8, нужно всегда помнить наизусть, а поэтому и заставляют детей выучить табличку наизусть, конечно, выяснив им ее предварительно на наглядных примерах. Для этого служит, главным образом, „счетная машина“, обычно называемая счетами. Она состоит из десяти параллельно укрепленных проволок, по которым свободно передвигаются по десять шариков на каждой. Отбрасывая надлежащим образом шарики, мы можем прочесть на доске результат умножения, написанный уже в десятичной форме.

Третий год обучения посвящается действиям над многозначными числами по известным простым правилам, справедливость которых детям обыкновенно ясна или, по крайней мере, должна была бы быть ясна. Правда, этой ясности еще обыкновенно недостаточно для того, чтобы ученик вполне усвоил правило, и учитель нередко апеллирует к авторитету очень действительного средства: „так оно есть, и, если ты этого не будешь знать, то тебе придется плохо!“.

Я хочу здесь подчеркнуть еще одну сторону всего этого обучения, ибо этой стороной дела обыкновенно пренебрегают в высшей школе; именно, с самого начала уделяется особенное внимание приложениям счета

к потребностям практической жизни. Числа с самого начала приводятся на конкретных примерах практической жизни; ученик очень скоро начинает считать монетами, мерами, весами, и вопросом, столь важным в повседневной жизни, — „что стоит?“ — начинается обыкновенно большая часть наших школьных задач. Отсюда преподаватель постепенно восходит к таким задачам (к так называемым „скрытым“ задачам), в которых ход вычисления предполагает уже некоторое самостоятельное рассуждение; это приводит к задачам на пропорциональное деление, смешение. К словам „наглядно“ и „генетически“, которыми мы старались выше охарактеризовать школьное обучение, мы могли бы присоединить, в качестве третьей характеристики, „практические приложения“.

Если бы мы, наконец, еще хотели охарактеризовать в немногих словах и цель обучения арифметике, то мы должны были бы сказать следующее: она заключается в том, чтобы приучить детей уверенно владеть арифметическими действиями, пользуясь при этом различными параллельно развивающимися душевными свойствами, к которым приходится апеллировать, но не настаивая глубоко на логичной концепции, связывающей этот материал.

Упомяну здесь кстати о некоторой вражде, играющей для школы нередко фатальную роль, — именно, о вражде между преподавателями, получившими образование в учительских семинариях, и преподавателями, вышедшими из высших учебных заведений [1]). Начиная с третьего класса, на место преподавателя, получившего образование в семинарии, вступает лицо с высшим образованием. Вследствие этого в ходе обучения часто происходит разрыв, достойный всякого сожаления. Бедные дети часто бывают вынуждены внезапно оперировать совершенно другими выражениями, нежели те, к которым они до того привыкли и над которыми теперь даже издеваются. Небольшим примером является, скажем, различие в знаках умно-

[1]) Мы имеем в виду семинарии для подготовления начальных учителей; это не относится к семинарским занятиям при средне-учебных заведениях, о которых мы упоминали выше.

жения: крест, который предпочитает начальный учитель, и точка, которой охотнее пользуются академисты. Это враждебное отношение можно изгладить только таким путем, что преподаватели, идущие из высшей школы, отнесутся с большим вниманием к своим коллегам из семинарии и будут стараться сойтись с ними. Это вам легко удастся выполнить, если вы всегда будете помнить, с каким уважением вы должны относиться к народному учителю. Подумайте только, какую нужно выработать в себе методическую выдержку, чтобы постоянно обучать арифметике сотни тысяч неразумных мальчишек, не приносящих в школу никакой предварительной подготовки. Попытайтесь это сделать и вы убедитесь, что вся ваша академическая подготовка принесет вам здесь мало пользы.

Однако после этого краткого отступления возвратимся к школьному преподаванию. В третьем и, в особенности, в четвертом классе обучение счету постепенно принимает уже благородное облачение математики, что характеризуется прежде всего переходом к буквенному исчислению. Буквами a, b, c или x, y, z обозначают какие-нибудь числа, хотя первоначально все же целые положительные; над этими числовыми понятиями, изображаемыми буквами, производят действия, исходя из конкретного, наглядного содержания, которое присваивается числам. Это представляет уже такой шаг вперед в деле абстракции, что математика собственно и начинается с действий над буквами. Конечно, переход не должен совершаться в школе внезапно; напротив, нужно приучать юношу к абстракции постепенно.

Но уже здесь в деле обучения становится совершенно необходимым, чтобы сам преподаватель был хорошо знаком с логическими законами и основами счета и теории целых чисел, хотя бы ему, естественно, и не приходилось непосредственно сообщать их ученикам. Займемся, поэтому, теперь несколько подробнее основными законами счета.

2. Основные законы арифметических действий.

В ходе исторического развития, конечно, долго складывали и умножали, не отдавая себе отчета в тех законах, которым следуют эти операции. Лишь в 20-х и

30-х годах предыдущего столетия, главным образом, французские и английские математики выяснили основные свойства этих операций. Кто хочет ознакомиться с историей этого вопроса подробнее, тому я могу рекомендовать здесь, как буду это делать неоднократно ниже, большую „Энциклопедию математических наук“ [1]), а также ее французское издание, отчасти носящее характер второго переработанного издания [2]). Эта „Энциклопедия“ должна была бы найти себе место во всякой школьной библиотеке, потому что она дает возможность всякому математику, учителю в том числе, ориентироваться в любом интересующем его вопросе. К тому предмету, которым мы теперь занимаемся, относится первая статья I тома [3]) „Основы арифметики“ Шуберта [4]), французское издание которого переработано Ж. Таннери и Ж. Мольком.

Возвращаясь к нашей теме, я имею в виду теперь действительно перечислить те пять основных законов, к которым приводится сложение:

1) $a+b$ всегда представляет собою число иначе говоря, действие сложения всегда без всяких исключений выполнимо (в противоположность вычитанию, которое в области положительных чисел не всегда выполняется);

2) сумма $a+b$ всегда однозначна;

3) имеет место сочетательный, или ассоциативный закон: $(a+b)+c=a+(b+c)$, так что скобки можно и вовсе опустить;

4) имеет место переместительный, или коммутативный закон: $a+b=b+a$.

---

[1]) B. G. Teubner Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen, Leipzig 1898 г.; томы I, II и V вышли в свет полностью, остальные томы заканчиваются изданием.

[2]) Encyklopédie des Sciences mathématiques pures et appliquées. Paris (Gauthier-Villars) и Leipzig (Teubner) 1904 г.; т. I вышел в свет. Со смертью Молька и в связи с мировой войной французское издание в 1914 г. прекратилось.

[3]) I том посвящен арифметике и алгебре и выпущен под редакцией В. Ф. Мейера (W. Fr. Meyer, 1896—1904 гг.); во французском издании I том редактировал Ж. Мольк (J. Molk).

[4]) H. Schubert, Grundlagen der Arithmetik.

5) **имеет место закон монотонности**: если $b > c$, то $a + b > a + c$.

Эти свойства понятны без дальнейших пояснений, если мы имеем перед глазами наглядное представление о числе как о количестве. Но они должны быть выражены строго формально, чтобы на них можно было основать дальнейшее развитие теории строго логически.

Что касается умножения, то здесь действует, прежде всего, пять законов, аналогичных только что перечисленным:

1) $a \cdot b$ всегда есть число;

2) произведение $a \cdot b$ однозначно;

3) закон сочетательности: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot b \cdot c$;

4) закон переместительности: $a \cdot b = b \cdot a$;

5) закон монотонности: если $b > c$, то $a \cdot b > a \cdot c$.

Наконец, связь сложения с умножением устанавливается шестым законом:

6) закон распределительности, или дистрибутивности:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Что все вычисления опираются исключительно на эти 11 законов, можно себе легко уяснить. Я ограничусь простым примером, скажем, умножением числа 7 на 12; согласно закону распределительности,

$$7 \cdot 12 = 7 \cdot (10 + 2) = 70 + 14;$$

далее, если мы разобьем 14 на $10 + 4$ (чтобы вывести „перенесение десятков"), то, опираясь на закон сочетательный, имеем:

$$70 + (10 + 4) = (70 + 10) + 4 = 80 + 4 = 84.$$

В этом коротком рассуждении вы, конечно, узнаете отдельные шаги, которые мы производим при вычислениях в десятичной системе. Предоставляю вам самим разобрать примеры посложнее. Мы здесь выскажем только сводный результат: наши цифровые вычисления заключаются в повторном применении перечисленных выше одиннадцати основных положений, а также в применении заученных наизусть результатов действий над простыми единицами (таблица сложения и таблица умножения).

Однако, где же находят себе применение **законы монотонности**? В обыкновенных, формальных вычислениях мы на них действительно не опираемся, но они оказываются необходимыми в задачах несколько иного рода. Напомню вам здесь о переделке, которую в десятичном счете называют **сокращенным умножением и делением**. Это прием величайшей практической важности, который, к сожалению, в школе и среди студентов делеко еще недостаточно известен, хотя при случае о нем говорят уже во втором классе; я здесь ограничусь только примером. Положим, что нам нужно помножить 567 на 134, причем в этих числах простые единицы установлены, — скажем, посредством физических измерений, — лишь весьма неточно. В таком случае было бы совершенно бесполезно вычислять произведение с полною точностью, так как таковое все равно не гарантирует нам точного значения интересующего нас числа. Но что нам действительно важно — это знать **порядок величины** произведения, т. е. определить, в пределах какого числа десятков или сотен число заключается. Но эту оценку закон монотонности действительно дает вам непосредственно, ибо из него вытекает, что искомое число содержится между $560 \cdot 134$ и $570 \cdot 134$ или между $560 \cdot 130$ и $570 \cdot 140$. Дальнейшее развитие этих соображений я опять-таки предоставляю вам самим. Во всяком случае, вы видите, что при **„сокращенных вычислениях" приходится постоянно пользоваться законами монотонности**.

Что касается действительного применения всех этих вещей в школьном преподавании, то о систематическом изложении всех этих основных законов сложения и умножения не может быть и речи. Учитель может остановиться только на законах сочетательном, переместительном и распределительном, и то только при переходе к буквенным вычислениям, эвристически выводя их из простых и ясных численных примеров.

3. Логические основы теории целых чисел.

Если в деле школьного преподавания мы, естественно, еще менее можем дойти до постановки более трудных вопросов, то в **современном математическом**

исследовании серьезные вопросы здесь, собственно, и возникают: *как обосновать эти законы, как обосновать понятие о числе?* Здесь я намерен ориентировать вас в этом вопросе, оставаясь верным цели настоящего сочинения — осветить материал школьного преподавания с высшей точки зрения, и я делаю это тем охотнее, что эти современные идеи и помимо того проникают к вам со всех сторон в течение ваших академических занятий, между тем как психологическая сторона этого дела обычно не оговаривается в той мере, в какой это необходимо.

Что касается, прежде всего, самого понятия о числе, то корни его в высшей степени трудно вскрыть. Легче всего дышится, быть может, тогда, когда решаешься вовсе оставить в стороне эти трудные вещи. За более подробными указаниями относительно этих вопросов, очень усердно дебатируемых философами, вы вновь должны обратиться к приведенной выше статье французской энциклопедии; здесь же я ограничусь немногими замечаниями. Очень распространена точка зрения, что понятие о числе тесно связано с понятием о последовательности во времени. Из представителей этого воззрения назову из философов Канта, из математиков — Гамильтона. Другие, напротив, полагают, что понятие о числе стоит ближе к пространственным представлениям; они сводят понятие о числе к одновременному созерцанию различных предметов, находящихся в пространстве друг подле друга. Наконец, третье направление усматривает в представлении о числе выражение особой способности нашего духа, независимо стоящей рядом с нашими представлениями о пространстве и времени, а может быть, и выше их. Я полагаю, что эта точка зрения хорошо выражается цитатой из „Фауста“, которую Г. Минковский [1]) приводит относительно чисел в сообщении о новом его сочинении „Диофантовы приближения“:

„Göttinen thronen hier in Einsamkeit,
Um sie kein Ort, noch weniger eine Zeit“

---

[1]) H. *Minkowsky*, Diophantische Approximationen.

(„Там царят в уединении богини, вокруг них нет ни места, нет ни времени“).

Если в этой задаче мы имеем дело более с вопросами теории познания и психологии, то в проблеме об обосновании наших одиннадцати законов мы стоим существенно перед вопросом логики.

Мы здесь будем различать четыре точки зрения.

1. Первая точка зрения, представителем которой я могу назвать Канта, смотрит на правила действий, как на непосредственный результат воззрения (Anschauung), причем это слово в наиболее широком его значении нужно понимать, как „внутреннее воззрение“, или *интуицию*. Впрочем, этот взгляд отнюдь не сводится к тому, что вся математика опирается на экспериментально контролируемые факты грубого внешнего опыта. Приведем простой пример. Закон переместительный доказывается ссылкой на приведенную здесь фигуру (фиг. 1), в которой соединены две группы по три точки в каждой, причем мы видим, что совокупность их распадается также на три группы по две точки в каждой: $2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$. Если на это, однако, возражают, что при сколько-нибудь значительных числах это непосредственное воззрение уже не приводит к сознанию справедливости высказанной истины, то приходится прибегнуть к *закону совершенной индукции: если некоторое предложение справедливо для небольших чисел, и если сверх того оно остается справедливым для числа $n+1$ всякий раз, как оно справедливо для числа n, то оно справедливо вообще для всякого числа*. Это предложение, имеющее, по моему мнению, интуитивное происхождение, действительно всегда помогает нам выйти за те пределы, в которые нас необходимо ставит конкретное воззрение. На этой приблизительно точке зрения стоит также и Пуанкаре в своих известных философских сочинениях.

Фиг. 1.

Если мы хотим уяснить себе значение этого вопроса об обосновании одиннадцати основных законов счета, то мы должны принять в соображение, что, совместно с арифметикой, на них, в конечном счете, покоится и вся математика. Мы не впадем поэтому в преувеличение, если скажем, что, согласно выясненной сейчас точке зрения, *достоверность всего здания матема-*

тики, в конечном счете, опирается на воззрение (интуицию), в самом обычном смысле этого слова.

2. Во вторую очередь мы приведем некоторую модификацию первой точки зрения. Она заключается в том, что пытаются расчленить эти основные законы на значительно более мелкие ступени, так что на непосредственном воззрении приходится основать только немногие простейшие случаи, из которых можно вывести остальные уже чисто логически, не прибегая вновь к воззрению. В то время как обычно чисто логические операции применяются лишь после установления названных одиннадцати законов, здесь оказывается возможным воспользоваться ими раньше, именно после введения упомянутых более простых предложений. Граница, отделяющая воззрение от логики, отодвигается, и притом в пользу последней. Эту точку зрения впервые провел Герман Грассман в своем „Учебнике арифметики"[1]), выпущенном в 1861 г.

В качестве примера я укажу, что закон переместительности с помощью совершенной индукции может быть выведен из закона сочетательности. После книги Грассмана следует указать сочинение итальянского ученого Пеано[2]) (Peano) „Начала арифметики, изложенные новым методом". Однако не думайте по этому заголовку, что книга написана по-латыни. Напротив, она написана на собственном символическом языке автора, который имеет целью выделить каждый шаг логического доказательства. Пеано имеет в виду таким образом достигнуть гарантий, что он действительно опирается исключительно на те положения, которые он предварительно принял, и не пользуется никаким другим интуитивным материалом. Он хочет избежать опасности, которую необходимо вносит обыкновенный язык своими бесконтрольными ассо-

[1]) H. Grassmann, Lehrbuch der Arithmetik für höhere Lehranstalten, Berlin 1861. Важнейшие главы отпечатаны в полном собрании математических и физических сочинений Г. Грассмана, H. Grassmanns gesammelte mathematische und physikalische Werken (herausgegeb. v. F. Engel), Bd. II, I (Leipzig 1904), pp. 295—349.

[2]) Peano, Arithemeticae principia nova methode exposita, Augustae Taurinorum, Torino 1889. Заметим, что автор развил идею, изложенную в указанном выше сочинении, в новой книге „Aritmetica generale e algebra elementare" (1902), написанной в идеографической системе.

циациями идей и воспоминаниями о наглядных образах. Должен сказать вам к тому же, что Пеано является главой целой школы, очень обширной в Италии, которая таким же образом расчленяет предпосылки каждой отдельной математической дисциплины и старается посредством идеографии (по-немецки Begriffsschrift, писание понятиями) исследовать ее логические концепции[1]).

3. Мы переходим теперь к современному развитию этих идей, которое, впрочем, оказало уже свое влияние и на Пеано. Я разумею ту обработку учения о числе, которая кладет в основу понятие о совокупности, или множестве. Общую идею о множестве — вы составите себе представление о широком объеме этого понятия, если я скажу вам, что совокупность всех целых чисел, с одной стороны, и совокупность всех точек отрезка, с другой стороны, представляют собой частные примеры множеств — эту общую идею впервые сделал предметом систематического математического исследования Георг Кантор (G. Kantor), профессор в Галле; созданное им учение о совокупностях, или множествах (Mengenlehre), в настоящее время значительно заинтересовало молодое поколение математиков. Позже я еще попытаюсь дать вам возможность заглянуть в эту теорию; здесь же я ограничусь следующей краткой характеристикой этой новой системы арифметики: эта система старается свести свойства целых чисел и относящихся к ним операций к общим свойствам множеств и связанных с ними абстрактных соотношений; этим имеется в виду достигнуть возможно более глубокого и общего обоснования теории целых чисел. В качестве

[1]) Наиболее яркое выражение это направление получило в обширном сочинении Уайтхеда и Русселя A. Whitehead and B. Russel Principia Mathematica в трех томах, первое издание которого было закончено в 1913 г. Все сочинение написано в идеографии и охватывает математическую логику, арифметику, алгебру и геометрию. Изучение этого сочинения и примыкающей к нему литературы представляет большие затруднения. Но помимо этого путь, по которому пошли эти авторы, не может привести к преодолению тех сложных логических затруднений, в которые уперлись наиболее глубокие попытки обоснования самых исходных начал арифметики и ее методов (в частности и закона совершенной индукции). *Ред.*

пионера этого направления я должен указать еще Р. Дедекинда (R. Dedekind), который в своей небольшой, но весьма содержательной книжке „Что такое числа и каково их значение"? [1]) впервые дал такое обоснование учения о целых числах. К этой точке зрения по существу примыкает и Г. Вебер (H. Weber) в первой главе первого тома „Энциклопедии элементарной математики". Однако оказывается, что развитие теории становится при этом настолько отвлеченным и мало доступным, что в приложении к третьему тому того же сочинения автор был вынужден дать более элементарное изложение того же предмета, оперирующее исключительно над конечными множествами. На это приложение я настойчиво обращаю внимание всех, кто интересуется этим предметом.

4. Наконец, в заключение, я хочу привести еще чисто формальную теорию числа, которая восходит еще до Лейбница и которая в последнее время особенно выдвинута Гильбертом. К арифметике относится в этом смысле его доклад на III международном математическом конгрессе в Гейдельберге „Об основах логики и арифметики" [2]). Исходная точка здесь заключается в следующем. Если мы уже располагаем одиннадцатью законами счета, то мы можем вести счет в буквах a, b, c, выражающих любые числа, совершенно не считаясь с тем значением, которое таковые имеют как числа. Или яснее: пусть $a, b, c,$... будут вещи без всякого значения, вернее, вещи, о значении которых нам ничего не известно. Положим также, что нам все же известно, что над ними можно производить операции согласно перечисленным одиннадцати основным положениям, хотя бы эти операции не имели какого-либо известного нам содержания; тогда мы можем оперировать над этими объектами совершенно так же, как и над обыкновенными числами; но при этом возникает только вопрос, не могут ли эти операции когда-либо привести к противоречию. Если обыкновенно говорят, что опыт обнаруживает существо-

---

[1]) R. Dedekind, Was sind und was sollen die Zahlen, Braunschweig, 1888.

[2]) D. Hilbert, Ueber die Grundlagen der Logik u. Arithmetik. Verhandlungen des III Internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg von 8 bis 13 August 1904 (Leipzig 1905), pp. 174 ff.

вание чисел, для которых перечисленные правила имеют место, и что в этих правилах, следовательно, нет противоречия, то теперь, когда мы отказываемся от реального значения этих символов, такого рода ссылка на наглядное представление уже не допустима. Вместе с тем возникает совершенно новая задача—доказать чисто логически, что при любых операциях над нашими символами согласно перечисленным одиннадцати основным законам мы никогда не придем к противоречию, т. е. упомянутые одиннадцать законов логически совместны (consistent). Если мы вначале, при изложении первой точки зрения, сказали, что достоверность математики покоится на существовании наглядных объектов, для которых имеют место ее законы, то представитель настоящей формальной точки зрения усматривает достоверность математики в том, что основные ее законы, с чисто формальной точки зрения, независимо от их наглядного содержания, представляют логически цельную систему, не содержащую противоречия.

Для выяснения и оценки этой новой точки зрения я должен сделать еще несколько замечаний.

a) Гильберт формулировал эти идеи по отношению к арифметике и начал их разрабатывать, но он отнюдь не дал полного развития их. После упомянутого доклада он еще раз возвратился к этому предмету в одной лекции, но больше этими вопросами не занимался. Мы можем, следовательно, сказать, что здесь мы имеем перед собой только программу.

b) Попытка совершенно изгнать воззрение и удержать только логическое исследование представляется мне в полной мере неосуществимой. Некоторый остаток, некоторый минимум интуиции всегда должен сохраниться, и эти остаточные интуитивные представления мы необходимо должны соединять с символами, над которыми оперируем, даже уже потому, что мы должны эти символы постоянно вновь узнавать, хотя бы этот остаток и сводился только к внешнему виду наших символов.

c) Но примем даже, что поставленная задача действительно безупречно разрешена, что обнаружено чисто логически отсутствие противоречия в наших одиннад-

пяти основных положениях. Но тогда все еще остается место возражению, которому я придаю наибольшее значение. Нужно себе уяснить, что эти соображения, собственно, обоснования арифметики еще отнюдь не дают, и что в этом порядке идей его и нельзя провести. Именно, совершенно невозможно чисто логическим путем показать, что законы, в которых мы обнаружили отсутствие логического противоречия, действительно имеют силу по отношению к числам, столь хорошо нам известным эмпирически, что неопределенные объекты, о которых здесь идет речь, могут быть отождествлены с реальными числами, а сопряжения, которые мы производим, — с реальными эмпирическими процессами. Что здесь действительно достигается — это только расчленение обширной задачи обоснования арифметики, мало доступной по своей сложности на две части; первая часть представляет собой чисто логическую проблему установления независимых друг от друга основных положений, или аксиом, и доказательства их независимости и отсутствия противоречия. Вторая часть задачи относится скорее к теории познания и в известной мере выражает применение названных логических исследований к реальным соотношениям; к разработке этой второй задачи, строго говоря, еще не приступлено, хотя для действительного обоснования арифметики и она необходимо должна быть исчерпана. Эта вторая часть вопроса представляет крайне глубокую задачу, трудность которой коренится в общих проблемах теории познания. Быть может, я выражу наиболее ясно постановку этого вопроса, если выскажу несколько парадоксальное утверждение, что всякий, который признает *чистой* математикой только чисто логическое исследование, необходимо вынужден будет отнести вторую часть проблемы обоснования арифметики, а вместе с этим, стало быть, и самую арифметику, к *прикладной* математике.

Я считаю необходимым отчетливо все это здесь указать, так как в этом именно пункте наиболее часто возникают недоразумения вследствие того, что многие просто не замечают существования этой второй задачи. Гильберт сам отнюдь не стоит на этой точке зрения,

и мы не можем признать ни одобрений ни возражений его теории, которые исходят из такого именно допущения. Томе (Thomae), профессор в Вене, остроумно назвал людей, стоящих на почве этих чисто абстрактно-логических исследований о вещах, ничего не обозначающих, и о предложениях, ничего не выражающих, которые, таким образом, не только забывают эту вторую проблему, но и всю остальную математику,—мыслителями без мысли; конечно, это ироническое замечание не может относиться к лицам, занимающимся этого рода исследованиями попутно, рядом с многочисленными другими вопросами.

В связи с этими рассуждениями об основах арифметики, обзор которых я вам изложил, я хочу представить вашему вниманию еще некоторые соображения общего характера. Многократно высказывалось мнение, что обучение математике можно и даже должно вести строго дедуктивно, полагая в основу целый ряд аксиом и развивая из него все остальное строго логически. Этот прием, который так охотно поддерживают историческим авторитетом Евклида, однако, отнюдь не соответствует историческому ходу развития математики. Напротив, в действительности математика развивалась подобно дереву, которое разрастается не путем тончайших разветвлений, идущих от корней, а разбрасывает свои ветви и листья вширь и вверх, распространяя их зачастую вниз, к корням. Совершенно так же и математика, оставляя образное выражение, начала свое развитие с определенного пункта, соответствовавшего, скажем, здравому человеческому смыслу, и по мере того, как мы восходили к новым и новым познаниям, мы одновременно опускались также и вниз к исследованию оснований науки. Так, например, мы стоим теперь относительно оснований на совершенно другой точке зрения, чем та, которой придерживались исследователи несколько десятков лет тому назад; точно так же то, что мы выдаем за последние принципы, через короткое время сделается пережитком, так как последние истины будут все глубже и детальнее расчленяться и приводиться к более общим положениям. *В основных исследованиях в области математики не может быть окончательного завершения, а вместе с тем и окончательно*

установленного первого начала, которое могло бы служить абсолютной исходной точкой для преподавания.

Я хотел бы сделать еще одно замечание, касающееся отношения между логической и интуитивной математикой, между чистой и прикладной математикой. Я имел уже случай упомянуть, что в школе приложение с самого начала сопровождает обучение арифметике, что ученик не только должен понимать правила, но должен также учиться делать из них то или иное употребление. Так оно нормально должно было оставаться и всюду, где идут занятия математикой. Чисто логические концепции должны составить, так сказать, твердый скелет организма математики, сообщающий ей устойчивость и достоверность. Но самая жизнь математики, важнейшие наведения и ее продуктивность относятся преимущественно к ее приложениям, т. е. к взаимным отношениям ее абстрактных объектов со всеми другими областями. Изгнать приложение из математики это то же, что искать живое существо с одной только костной основой без мускулов, нервов и сосудов.

В деле научного исследования будет, конечно, всегда оставаться разделение труда между чистой и прикладной наукой, но, если только мы хотим сохранить здравое соотношение, мы должны заботиться о непрерывной связи между этими сторонами дела; здесь же я хотел бы с особенной силой подчеркнуть то обстоятельство, что в школе такого рода разделение труда, такого рода специализация отдельного учителя совершено невозможны. Вообразите себе, например, — чтобы это резко выразить, — в какой-либо школе учителя, который трактует числа как символы, лишенные значения; другого, который умеет из этих ничего не означающих символов получить наглядные числа; наконец, третьего, четвертого, пятого, которые владеют приложениями этих символов в геометрии, механике, физике. Представьте себе, что в распоряжение всех этих различных учителей будут предоставлены ученики. Вы понимаете, что таким образом дело обучения не может быть организовано; этим путем предмет не может быть усвоен учениками, а различные учителя не

смогут понимать друг друга. Потребности школьного преподавания, таким образом, предполагают известную разносторонность каждого учителя, уменье довольно широко ориентироваться в области чистой и прикладной математики в самом широком смысле этого слова; этим путем учитель должен всегда создавать корректив против слишком мелкого расщепления науки.

Я возвращусь здесь еще раз к упомянутым уже выше дрезденским предложениям, чтобы дать практическое направление всем последним замечаниям. В этих предложениях мы настаиваем на том, чтобы прикладная математика, которая с 1898 г. введена в испытание на звание учителя как особая специальность, была признана необходимой составной частью каждого нормального математического образования, чтобы, таким образом, удостоверение в праве преподавания чистой и прикладной математики выдавалось всегда совместно. Наконец, упомянем также, что педагогическая комиссия в так называемой меранской программе ставит целью обучения математике в выпускном классе [1]. Эта цель должна быть троякого рода:

1) научный обзор систематического построения математики;

2) уменье толково справляться с численной и графической разработкой отдельных задач;

3) некоторое ознакомление с значением математической мысли в естествознании и современной культуре [2].

Ко всем этим резолюциям я присоединяюсь с глубочайшим убеждением в их правильности.

4. Практика счета с целыми числами.

После отвлеченных рассуждений, которыми я преимущественно занимался до сих пор, я обращусь к кон-

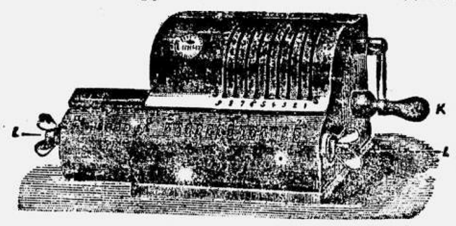
[1]) Reformvorschläge für den math. und naturwiss. Unterricht überreicht der Vers. d. Naturforscher u. Aerzte zu Meran (Leipzig 1905). Этот отчет напечатан также в общем отчете комиссии на стр. 93 (см. нашу ссылку в № 479, на стр.); сведения о нем можно найти также в книге Klein Schimmack на стр.. 208 (см. нашу ссылку в № на стр.).

[2]) Само, собою разумеется, что сюда включается и ознакомление с простейшими и важнейшими приложениями математики к технике, поскольку это возможно без специального технического образования. В своих многочисленных выступлениях Клейн все да указывает, что техника составляет основную базу современной культуры. *Ред.*

кретным вещам, именно — исключительно к вычислениям, производимым над числами. Из литературы, дающей возможность в этом вопросе ориентироваться, я прежде всего укажу опять-таки на статью в энциклопедии по этому предмету, принадлежащую Р. Мемке[1]. Я лучше всего дам вам обзор относящихся сюда вопросов, если сначала изложу вам план этой статьи. Она распадается прежде всего на две части, именно: А. Учение о точных вычислениях; В. Учение о приближенных вычислениях. К отделу А принадлежат все методы, облегчающие точные действия над большими числами, как, например, удобное расположение тех или иных схем в вычислении, таблицы произведений и квадратов, в особенности же счетные машины, которыми мы сейчас займемся подробнее. В отделе В, напротив, вы найдете разработку всех тех приемов, которые имеют в виду определить только порядок величины результата, т. е. установить первые значащие его цифры. Сюда относятся таблицы логарифмов и аналогичные средства вычисления, как, например, счетная линейка, которая, строго говоря, представляет собой только графическую таблицу логарифмов, особым образом приспособленную, и, наконец, многочисленные графические методы. Кроме этого реферата я могу еще рекомендовать вам небольшую книгу Люрота — „Лекции о вычислениях, производимых над числами"[2], которая написана знатоком дела и при приятном изложении дает возможность быстро ориентироваться в вопросе. Из всего того, что относится к вычислениям, производимым над целыми числами, я намерен описать вам подробнее счетную машину, которую в настоящее время в весьма разнообразных конструкциях можно найти в любой более или менее значительной конторе и которая практически действительно имеет весьма большое значение. В нашем кабинете математических моделей имеется экземпляр одного из наиболее распространенных типов, так называемой „Brunsviga", которая изготовляется фирмой „Grimme Natalis und Co". в Брауншвейге. Это одна из наиболее универсальных и

[1]) R. Mehmke, Numerisches Rechnen, Encykl., Bd I, Teil 2.
[2]) F. Lüroth. „Vorlesungen über numerisches Rechnen". Leipzig, 1900.

в то же время из наиболее простых машин; хотя это и не лучшая машина, но она имеет то большое преимущество, что она сравнительно дешева — она стоит только от 200 до 300 марок. В первоначальном своем виде она была изобретена русским математиком Однером и долгое время была известна под названием арифмометра (фиг. 2). Устройство этой машины я хочу вам объяснить здесь, в виде примера, несколько подробнее; описание других конструкций вы найдете в упомянутых выше сочинениях[1]) Конечно, по моему описанию вы только в том случае действительно поймете устройство машины, если вы потом к ней присмотритесь и сами на деле ознакомитесь с ее функциями. Машина находится в ва-



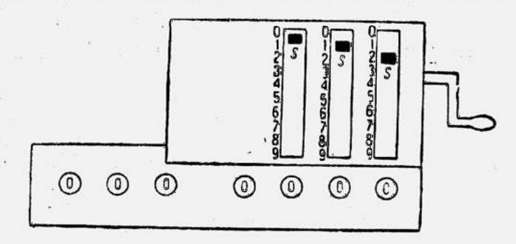
Фиг. 2.

шем распоряжении после лекции. Что касается, прежде всего, внешнего вида машины „Brunsviga", то схематически ее можно описать следующим образом. К довольно большой крепкой коробке (барабану) снизу прикреплен меньший продолговатый футляр (каретка), которая может передвигаться вдоль по барабану вперед и назад. С правой стороны с барабана выступает рукоятка, которую можно крутить рукой. На барабане сделано несколько продолговатых прорезов, вдоль каждого из которых сверху вниз нанесены цифры 0, 1, 2,...,9. Из каждого прореза выступает спица S, которую можно установить против любой из этих цифр. Каждому из этих прорезов отвечает на каретке отверстие, в котором может поя-

[1]) О других типах счетных машин см. Galle „Mathematische Instrumente", Leipzig 1912. *Ред.*

виться цифра. Я полагаю, что устройство машины вам выяснится лучше всего, если я опишу вам выполнение какого-нибудь вычисления и выясню, как его производит машина. Выбираю для этого умножение.

Прием заключается в следующем. Прежде всего нужно поставить при помощи спиц, выступающих из барабана, множимое. Это значит, что нужно поставить сначала первую спицу с правой стороны на цифру, стоящую в разряде единиц, вторую — на цифру в разряде десятков и т. д. Все остальные спицы



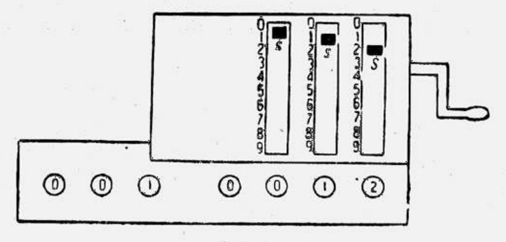
Фиг. 3.

остаются на нулях. Если 12 есть множимое, то первая спица справа должна быть поставлена на 2, вторая на 1, а остальные остаются на нулях (фиг. 3).

Теперь повернем рукоятку слева направо на один оборот. Тогда внизу, в отверстиях каретки, появится множимое. Стало быть, в нашем случае появится двойка в первом отверстии справа, единица — во втором, а в остальных останутся нули. Одновременно с этим на счетчике, цифры которого появляются в ряде отверстий, помещающихся с левой стороны каретки, появляется единица, показывающая, что мы повернули каретку один раз (фиг. 4). Если мы вообще имеем однозначный множитель, то рукоятку нужно повернуть столько раз, сколько во множителе единиц. Вместе с тем множитель появится на каретке с левой стороны, а произведение — с правой.

Каким же образом аппарат воспроизводит этот результат? Прежде всего, внизу в каретке, с левой стороны,

под отверстием счетчика, приделано счетное колесо, на периферии которого, на равных расстояниях, нанесены цифры 0, 1, 2,..., 9, причем при помощи передачи зубчатыми колесами счетное колесо совершает одну десятую оборота, когда рукоятка делает целый оборот, так что цифра, находящаяся наверху колеса под отверстием каретки, действительно показывает число оборотов рукоятки, т. е. показывает множитель.

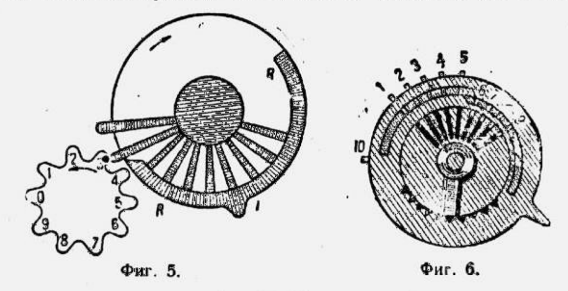


Фиг. 4.

Что касается умножения, то для его производства под каждым отверстием с правой стороны каретки помещается счетное колесо такой же конструкции. Но каким образом оказывается, что теперь при обороте рукоятки в приведенном выше примере одно колесо проскакивает на одну единицу, второе в то же время на две единицы? Здесь, собственно, и находит себе применение конструктивная особенность машины „Brunsviga". Именно, под каждым прорезом барабана находится плоское колесо (двигательное колесо); к нему приделано девять зубцов, которые могут двигаться в радиальном направлении. По краю плоского круга движется кольцо R (фиг. 5 и 6), поворачивающееся, когда мы переставляем спицу S, о которой речь была выше; именно, смотря по метке, на которую мы ставим спицу S на прорезе, наружу выскакивают 0,1,2,..., или 9 подвижных зубцов (на фиг. 5 выдвинуты два зубца). Эти зубцы непосредственно попадают под соответствующее отверстие счетного колеса, и поэтому при одном обороте рукоятки каждое двига-

тельное колесо поворачивает соответствующее счетное колесо каретки на столько единиц, сколько в нем выскочило зубцов, т. е. сколько указывает цифра, на которую мы установили соответствующую спицу *S*.

Сообразно этому, в указанном выше примере, если мы начинаем с нулевого положения, после одного поворота рукоятки колесо единиц должно повернуться на две единицы, колесо десятков на одну, и на каретке появится 12; при втором повороте рукоятки колесо единиц вновь повернется на 2, колесо десятков на 1 единицу, и машина покажет 24. Таким же образом после трех и четырех оборотов рукоятки мы получим $36 = 3 \cdot 12$ и $48 = 4 \cdot 12$.



Фиг. 5. Фиг. 6.

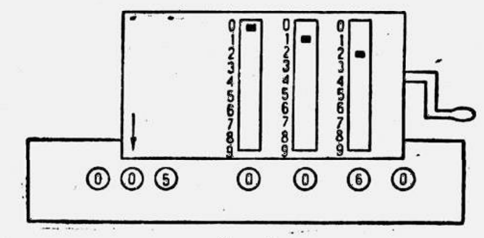
Теперь повернем рукоятку в пятый раз. Согласно тому, что было объяснено выше, колесо единиц повернется на две единицы и остановится, следовательно, на нуле, колесо же десятков должно повернуться на одну единицу и стать на 5, так что мы получили бы неправильный результат 50 вместо $5 \cdot 12 = 60$. Когда мы действительно будем поворачивать рукоятку, то на каретке незадолго до конца поворота действительно появится 50; но когда мы доведем оборот до конца, то в последний момент цифра меняется на 6, так что появляется правильный результат. Здесь произошло, следовательно, еще кое-что, чего мы не описали, — процесс, представляющий наиболее тонкий пункт при устройстве каждой счетной машины, — так называемое перенесение десятков.

Принцип, при помощи которого эта задача разрешается, заключается в следующем: когда одно из счетных колес каретки (в нашем примере — колесо единиц) проходит через нуль, то оно нажимает один зубец, остающийся, обыкновенно, сбоку без действия. Благодаря этому упомянутое двигательное колесо захватывает соответствующее счетное колесо так, что последнее продвигается на одну единицу больше, чем это произошло бы без нажатия. Детали этой конструкции вы можете себе выяснить, только непосредственно рассмотрев самый аппарат. Останавливаться на этих деталях тем более нецелесообразно, что именно в деле перенесения десятков в машинах различных систем находят себе применение другие принципы. Тем не менее я очень рекомендую вам рассмотреть нашу машину, как пример чрезвычайно остроумной конструкции. В нашей коллекции имеются особые экземпляры отдельных составных частей машины „Brunsviga“, которые в составленной машине почти не видны. Вы можете, таким образом, составить себе вполне ясное представление об устройстве машины.

Действие машины, насколько мы с нею до сих пор познакомились, мы можем выразить одним словом, если мы назовем ее машиной сложения в том смысле, что она, при каждом обороте рукоятки, прибавляет к числу, стоящему справа внизу каретки, множимое один раз.

Наконец, я хочу еще в общих чертах описать то приспособление, которое дает возможность быстро оперировать также с многозначными сомножителями. Если бы нам нужно было умножить 12 на 15, то мы должны были бы, сообразно выясненному приему, повернуть рукоятку 15 раз. Кроме того, если бы мы пожелали, чтобы с левой стороны на счетчике появился весь множитель, то и к счетчику должно было бы быть приделано приспособление для счета десятков. То и другое устраняется следующим образом. Мы выполняем сначала умножение на 5, так что на каретке появляется с правой стороны 60, с левой стороны — 5 (фиг. 7). Теперь мы передвигаем каретку на один разряд направо; при этом счетное колесо единиц выключается, колесо же десятков устанавливается под прорезом для единиц в барабане и т. д.; в то же время на левом конце на счетчике вместо колеса

единиц приходит в соединение с рукояткой колесо десятков. Если поэтому мы повернем теперь рукоятку один раз, то слева появляется единица на месте десятков, так что мы можем прочесть 15. Справа же производится сложение не в порядке $\frac{60}{12}$, а в порядке $\frac{60}{\;\;12}$, т. е. к 60 прибавляется 120: прибавляемая двойка переносится на колесо десятков, а единица — на колесо сотен. Вы видите, таким образом, что этот прием представляет собой машинное осуществление того процесса, который мы производим, когда делаем умножение письменно, именно, когда мы подписываем последовательные частные произ-



Фиг. 7.

ведения одно под другим, постепенно отодвигая их каждый раз на один знак влево. Совершенно таким же образом мы всегда производим умножение с многозначными числами, подвигая после обыкновенного умножения на единицы каретку последовательно на один, на два, на три разряда направо и поворачивая после этого рукоятку соответственно столько раз, сколько в множителе есть десятков, сотен и т. д.

Как производятся при помощи машины другие вычисления, вы можете непосредственно видеть на аппарате. Здесь достаточно будет заметить, что вычитание и деление производятся вращением рукоятки в обратную сторону.

Позвольте мне еще указать, подводя итог всему сказанному, что теоретический принцип этой машины совершенно элементарен и представляет только практиче-

ское осуществление правил, которыми мы обычно пользуемся при механическом вычислении. Конечно, машина должна вполне надежно функционировать, все части должны быть точно прилажены, не должно быть мертвых точек, при которых могла бы произойти остановка во вращении счетных колес; все это—задача конструктора и механика, изготовляющего машину.

Остановимся еще на минутку на общем значении того факта, что действительно существуют счетные машины, которые освобождают математика от чисто механических вычислений и которые выполняют их гораздо быстрее и более безошибочно, так как машина свободна от случайных ошибок, с которыми всегда может быть сопряжено беглое вычисление. Самое существование такого рода машины может служить для нас подтверждением того, что для производства вычислений существенным является не значение целых чисел, а формальные правила, по которым они совершаются, ибо машина может следовать только этим правилам — так она устроена, — но наглядного представления о значении чисел она иметь не может. Вряд ли можно считать случаем то обстоятельство, что такой человек, как Лейбниц, который был в такой же мере абстрактным мыслителем первого ранга, как и человеком выдающихся практических дарований, является одновременно как отцом чисто формальной математики, так и изобретателем первой счетной машины. Его машина еще по настоящее время представляет одно из наиболее ценных достояний музея Кестнера в Ганновере. Хотя это исторически и не удостоверено, но я склонен допустить, что Лейбниц имел в виду изобретением счетной машины не только достигнуть практических целей, но и ярко осветить строго формальный характер математических вычислений.

Само собою разумеется, однако, что Лейбниц отнюдь не был склонен изобретением счетной машины умалить значение математической мысли, а между тем такого роды выводы иногда приходится слышать. „Если,— говорят, — деятельность науки может осуществляться также машиной, то на эту науку, конечно, немного можно поставить, и роль ее неизбежно должна быть совершенно второстепенной“. Однако на такого рода

аргументацию достаточно возразить, что математик, когда он сам оперирует над числами и формулами, отнюдь не представляет собой только жалкой копии непогрешимой машины, — что он ни в коем случае не является „мыслителем без мысли“ по выражению Томе. Напротив, он сам себе ставит задачи, имеющие определенную и полезную цель, и разрешает их всякий раз новыми, своеобразными приемами. Он изобрел счетную машину только для того, чтобы освободить себя от некоторых операций, постоянно повторяющихся в однообразной последовательности; и что нужно менее всего забывать, математик ее изобрел, и математик постоянно ставит ей на разрешение задачи.

Позвольте мне закончить пожеланием, чтобы со счетной машиной, ввиду большого значения, которое она приобретает, познакомились более широкие круги; в настоящее время ее, к сожалению, знают еще весьма немногие. Прежде всего же с нею должен, конечно, познакомиться учитель; я не могу не высказать пожелания, чтобы каждый ученик в старшем классе средней школы имел возможность хоть раз посмотреть эту машину.

II. ПЕРВОЕ РАСШИРЕНИЕ ПОНЯТИЯ О ЧИСЛЕ.

Мы намерены теперь оставить целые числа и в настоящей главе перейти к расширению понятия о числе. В школе этот процесс разделяют обыкновенно на следующие ступени.

1. Введение дробей и действия над ними.
2. Изложение теории отрицательных чисел в связи с началами буквенного исчисления.
3. Более или менее подробное развитие понятия об иррациональном числе на примерах по различным поводам; вместе с этим постепенно устанавливается представление о совокупности всех вещественных чисел.

Совершенно безразлично, начинать ли с пункта первого или со второго. Мы предпочитаем последнее.

1. Отрицательные числа.

Начнем с одного замечания, относящегося к терминологии. В школе положительные и отрицательные числа

обыкновенно называют „относительными“ числами, в противоположность „абсолютным“ (положительным); между тем в университете эта манера выражения не принята. В школе те же относительные числа называют также „алгебраическими“ числами [1]) — термин, который в университете мы употребляем в совершенно ином смысле.

Что касается происхождения и введения отрицательных чисел, то относительно фактического материала я могу быть краток: этими вещами вы владеете свободно и, во всяком случае, по моим указаниям вы легко в них ориентируетесь. Более подробное изложение вы найдете, помимо книги Вебера-Вельштейна, также в сочинении Г. Буркгардта „Алгебраический анализ“ [2]). Последнюю книгу легко также приобрести, так как она невелика.

Ближайшим поводом для введения отрицательных чисел является, как известно, требование *сделать вычитание операцией, выполнимой во всех случаях*. Если $a < b$, то в области натуральных чисел разность $a - b$ не имеет смысла. Существует, однако, число $c = b - a$, и мы полагаем:

$$a - b = -c,$$

и $-c$ называем отрицательным числом. С этим связывают обыкновенно с самого начала интерпретацию целых чисел при помощи скалы равноотстоящих точек на прямой, простирающейся безгранично в обе стороны, или „оси абсцисс“ (фиг. 8).

-4 -3 -2 -1 0 +1 +2 +3 +4

Фиг. 8.

Этот образ можно считать в настоящее время достоянием всех образованных людей, и нужно полагать, что своим распространением он обязан, главным образом, известной всем термометрической скале. Наглядный и хорошо известный образ отрицательных чисел представляет расчет прибылей и убытков.

Но мы здесь, прежде всего, точно выразим, в чем заключается, собственно, принципиальный и чрезвычайно

[1]) Относительно этой терминологии см. Mehler. Hauptsätze der Elementarmathematik, 19 Aufl., Berlin 1795, S. 77.
[2]) H. Burkhardt, Algebraische Analysis, Leipzig 1903.

трудный шаг, который связан с введением отрицательных чисел в школе.

Если ученик привык постоянно связывать с числами и затем с буквами, над которыми он оперирует, конкретные количества и при сложении их, а также при других действиях всегда имел перед глазами соответствующие операции, которые можно реально над этими количествами производить, то теперь дело совершенно меняется. Ему приходится иметь дело с чем-то новым, с „отрицательными числами“, которые уже не имеют ничего общего с наглядным образом о количестве предметов; ему приходится производить над ними действия как над количествами, а между тем именно эти действия совсем уж не имеют для него прежнего ясного, наглядного значения. Здесь приходится в первый раз делать переход от реальной математики к формальной, для полного уяснения которой нужно значительное развитие способности к абстракции.

Присмотримся, однако, подробнее, что происходит с арифметическими действиями по введении отрицательных чисел. Прежде всего ясно, что сложение и вычитание по существу сливаются воедино. Прибавление положительного числа есть вычитание равнопротивоположного отрицательного числа. М. Симон делает по этому поводу остроумное замечание, что именно вследствие введения отрицательных чисел, благодаря которому вычитание становится действием, не имеющим исключения, оно перестает существовать как самостоятельная операция. Для этого обобщенного сложения, охватывающего также и вычитание, в области положительных и отрицательных чисел неизменно остаются в силе те же основные пять формальных законов: 1) постоянная выполнимость, 2) однозначность, 3) сочетательность, 4) переместительность и 5) монотонность. Относительно свойства 5-го нужно заметить, что $a<b$ теперь означает, выражаясь кратко, что при геометрическом изображении число a лежит влево от b, так что, например, $-2<-1$, $-3<+2$ и т. д.

При умножении важнейшим моментом является так называемое правило знаков, согласно которому

$$a\cdot(-c)=(-c)\cdot a=-(a\cdot c) \text{ и } (-c)\cdot(-c')=+cc';$$

в особенности последнее (минус на минус дает плюс) часто представляет собой камень преткновения. К внутренней сущности этого правила нам придется еще сейчас возвратиться. Мы выразим его предварительно одним предложением, относящимся к произведению какого угодно числа положительных и отрицательных чисел: абсолютная величина произведения равна произведению абсолютных величин сомножителей, по знаку же оно будет положительным или отрицательным, смотря по тому, входит ли в его состав четное или нечетное число отрицательных множителей. По установлении этого положения умножение в области положительных и отрицательных чисел опять обладает следующими свойствами: 1) постоянная выполнимость, 2) однозначность, 3) сочетательность, 4) переместительность и 5) распределительность относительно сложения. Только в законе монотонности здесь оказывается уклонение. Его место теперь занимает следующий закон: если $a>b$, то $ac>bc$, $ac=bc$ или $ac<bc$, смотря по тому, будет ли $c>0$, $c=0$ или $c<0$.

Спросим себя теперь, не заключают ли эти законы по чисто формальному своему содержанию логического противоречия. Мы должны в первую очередь сказать, что доказательство отсутствия противоречия, основанное на чисто логических соображениях, по настоящее время здесь еще менее удалось провести, чем для целых чисел. Но вопрос удалось свести к тому, что названные законы наверное не имеют противоречия, если они не содержат такового в применении к целым положительным числам. До тех пор, следовательно, пока этот вопрос не будет доведен до конца, т. е. пока не будет дано логическое доказательство отсутствия противоречия в области тех же операций над целыми числами, мы можем основывать уверенность в отсутствии противоречия в названных законах лишь на том, что существуют наглядные объекты и наглядные операции над ними, которые следуют этим законам. В качестве таких наглядных объектов мы указали уже выше ряд равноудаленных одна от другой точек на оси абсцисс; нам остается только прибавить, что означают в применении к этим образам арифметические действия. Сложение $x'=x+a$ при постоянном a

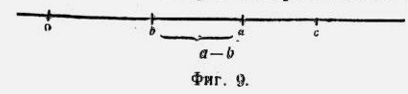
относит каждой точке x некоторую точку x' таким образом, что неограниченная прямая просто передвигается по самой себе на отрезок a и притом вправо или влево смотря по тому, имеет ли a положительное или отрицательное значение. Точно так же и умножение $x' = ax$ представляет собой подобное преобразование прямой в себе самой и притом при $a > 0$ — прямое растяжение, при $a < 0$ — растяжение, связанное с полуоборотом вокруг нулевой точки.

Я хочу теперь остановиться на том, как, собственно, все эти вещи исторически возникли. Не нужно думать, что отрицательные числа представляют собой открытие какого-либо одного умного человека, который вместе с тем, быть может, даже обнаружил на основании геометрического их толкования отсутствие в них противоречия. Напротив, в процессе медленной эволюции употребление отрицательных чисел как бы само собой напрашивалось, и лишь позже, когда над ними уже давно оперировали, именно в XIX в. возник вопрос об отсутствии противоречия.

Переходя к истории отрицательных чисел, позвольте мне обратить ваше внимание на то, что древние греки, несомненно, не владели отрицательными числами, так что здесь мы имеем пункт, в котором грекам не приходится отводить первого места, как это некоторые всегда склонны делать. Напротив, честь открытия отрицательных чисел должна быть приписана индусам, которые ввели также нуль и нашу систему цифр. В Европе отрицательные числа постепенно вошли в употребление в эпоху Возрождения в тот именно период, когда стали оперировать над буквами. Не могу не упомянуть при этом, что более или менее совершенное буквенное исчисление было впервые дано Виета (Vieta) в его сочинении „In artem analyticam isagoge"[1]). На этой почве, естественно, пришли к так называемым правилам скобок для действий над положительными числами, которые, конечно, содержатся в перечисленных нами выше основных формулах, если мы только присоединим соответствующие законы вычи-по краОднако я хочу остановиться несколько подробнее, по крайней мере, на двух примерах, чтобы, прежде всего,

[1]) Tours, 1591.

показать, что для них можно дать крайне простые и наглядные доказательства — правда, такие доказательства, которые, собственно говоря, исчерпываются фигурой и



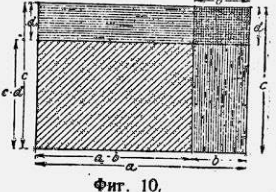
Фиг. 9.

словечком „смотри", как мы это часто встречаем у древних индусов.

1) Пусть $a > b$ и $c > a$. В таком случае $a - b$ есть положительное число, меньшее, нежели c. Поэтому разность $c - (a - b)$ будет положительным числом (фиг. 9). Если мы нанесем эти числа на ось абсцисс и заметим, что расстояние между точками b и a имеет длину $a - b$, то достаточно взглянуть на рисунок, чтобы убедиться в следующем: если мы отнимем от c отрезок $a - b$, то мы получим то же самое, что получили бы, если бы мы отняли сначала весь отрезок a, а затем прибавили отрезок b, т. е.

$$c - (a - b) = c - a + b. \qquad (1)$$

2) Пусть $a > b$ и $c > d$; тогда разности $a - b$ и $c - d$ представляют собой целые положительные числа. Рассмотрим произведение $(a - b) \cdot (c - d)$. С этою целью мы построим прямоугольник со сторонами $a - b$ и $c - d$ (фиг. 10); он составит часть прямоугольника, имеющего стороны a и c. Чтобы из последнего получить первый, мы отнимем сначала верхний, горизонтально заштрихованный прямоугольник $a \cdot d$, а потом



Фиг. 10.

расположенный и заштрихованный вертикально прямоугольник $b \cdot c$. Однако небольшой прямоугольник $b \cdot d$, заштрихованный накрест, мы отняли лишний раз; мы должны его поэтому снова прибавить. Этим путем мы приходим к известной формуле:

$$(a - b)(c - d) = ac - ad - bc + bd. \qquad (2)$$

В дальнейшем развитии этих идей сказывается общая особенность человеческой натуры, заключающаяся в том, что мы невольно постоянно стремимся распространять правила, выведенные для частных случаев, на другие, более общие случаи[1]). Ганкель в своем сочинении „Теория комплексных числовых систем“[2]) называет это **принципом перманентности** формальных законов и придает ему значение руководящего основного положения. Эту в высшей степени интересную книгу я могу вам очень настойчиво рекомендовать. Этот общий принцип в применении к интересующему нас случаю означал бы, что мы желаем освободить формулы (1) и (2) от условий, касающихся относительной величины чисел a и b, в предположении которых они только и выведены, и сделать их применимыми также к другим случаям. Если мы применим, таким образом, формулы (2), например, к случаю

---

[1]) Конечно, взгляд на стремление к обобщению, как на общую особенность человеческой натуры („allgemeine Eigentümlichkeit der menschlichen Natur) является глубоко идеалистическим. Это стремление в научном исследовании выработалось в ходе его эволюции, как результат той пользы, которую такое обобщение обыкновенно приносило. Весьма возможно, что в результате образования, при котором эта тенденция к обобщению выдвигается на первый план, научные работники становятся уже на этот путь почти бессознательно. Но утверждать, что эта черта представляет собою общую особенность человеческой натуры, значит успокаивать мысль на свыше идущей функции вместо того, чтобы искать действительные причины явления.

К этому, быть может, небесполезно прибавить, что именно в математике обобщение далеко не всегда приносит значительную пользу. Расширяя объем математической теории, обобщение неизбежно сжимает ее содержание и этим нередко сводит на-нет ту ценность, которую теория имеет.

В качестве хорошего примера можно указать на учение о комплексных числах (см. ниже гл. V). В классическом значении слова это было обобщение, которое принесло математике значительную пользу. Дальнейшее обобщение привело к так называемым гиперкомплексным числам, которые непосредственно оказались гораздо менее полезными Породив, правда, современное векторное исчисление, они в настоящее время вовсе вышли из употребления.

Ред.

[2]) Hermann Hankel, „Theorie der komplexen Zahlsysteme“- Leipzig 1867. Имеется русский перевод: Г. Ганкель „Теория комплексных числовых систем“ перевод с немецкого под редакцией И. И Парфентьева, Казань 1912.

$a = c = 0$ (для какового случая мы этой формулы отнюдь не доказали), то мы получим $(-b)\cdot(-d) = +bd$, т. е. получим правило знаков при умножении отрицательных чисел. Таким образом мы действительно можем почти бессознательно притти ко всем четырем правилам, которые мы, пожалуй, склонны будем даже признать за совершенно необходимые допущения. В действительности же они будут необходимы лишь постольку, поскольку мы хотим сохранить для этих новых объектов прежние правила действия. Старые математики, конечно, не с легким сердцем решались на образование этих новых понятий, и тяжелое чувство, с которым они на это шли, сказывалось в тех названиях, которые они часто давали отрицательным числам: „придуманные числа“, „ложные числа“ и т. д. Однако, несмотря на все эти сомнения, в XVI и XVII вв. отрицательные числа постепенно приобретают всеобщее признание; много способствовало этому, без сомнения, развитие аналитической геометрии. Конечно, сомнения еще оставались и должны были оставаться до тех пор, пока все еще старались интерпретировать отрицательное число как количество предметов и не уясняли себе возможности априорного установления формальных законов; в связи с этим стояли постоянные попытки доказать правило знаков. Простое разъяснение, которое принес только XIX в., заключается в том, что о логической необходимости всего этого положения, о его доказуемости не может быть никакой речи. Напротив, речь может итти только о том, чтобы признать его логическую допустимость; в остальном же оно является произвольным и регулируется лишь соображениями целесообразности и приведенным выше принципом перманентности.

При этих соображениях нельзя не высказать мысли, которая и помимо того часто напрашивается, что вещи нередко представляются разумнее, нежели люди. Вы видите, что один из важнейших шагов в математике, именно введение отрицательных чисел и действий над ними, был сделан не вследствие сознательного логического суждения одного человека, а органически развился благодаря интенсивным занятиям этими вещами: может даже показаться, что человек научился этим правилам от букв.

Сознательное убеждение, что мы при этом поступаем правильно, не впадая в коллизию со строгой логикой, явилось лишь гораздо позже. Вообще, чистая логика при образовании таких новых понятий всегда может иметь регулирующее значение, руководящей же роли она играть не может, ибо единственное требование, которое она ставит, заключается в том, чтобы не было внутреннего противоречия, а этому, конечно, могут удовлетворить и многие другие абстрактные системы.

Если вас интересует литература по теории отрицательных чисел, то я могу вам указать еще на книгу Тропфке—„История элементарной математики"[1]). Это — превосходное собрание материалов, содержащее очень много подробностей относительно развития элементарных понятий, воззрений и обозначений в ясном изложении, очень удобном для обозрения.

Обращаясь к критическому обзору того, как отрицательные числа излагаются в школе, нужно прежде всего сказать, что преподаватели часто здесь делают ту же ошибку, в которую впадали старые математики, именно, они все пытаются доказать правило знаков, как нечто логически необходимое. Особенно часто выдают за доказательство приведенный выше эвристический вывод правила $(-b)\cdot(-d)=+bd$ из формулы для $(a-b)\cdot(c-d)$, фактически совершенно забывая, что эта формула первоначально неразрывно связана с неравенствами $a>b, c>d$ [2]). Таким образом доказательство как бы симулируется, и психологический момент, который в силу принципа перманентности приводит к этому правилу, смешивается с логическим доказательством Ученик, которому это в таком виде в первый раз преподносится, естественно, не может этого понять, но поверить этому он, в конце концов, вынужден; если же при повторении на высшей ступени обучения, как это часто бывает, ученик не получает более точных разъяснений, то у многих может установиться убеждение, что эта теория содержит нечто мистическое, непонятное.

[1]) Tropfke, Geschichte der Elementarmathematik, 2 Bände, Leipzig 1902/3. Второе издание вышло в свет в 7 томах.
В русском переводе имеется также сочинение Ф. Кеджори „История элементарной математики". Перевод с английского под редакцией, с примечаниями и добавлениями И. Ю. Тимченко. Одесса 1910.

[2]) См., например, E. Heis, Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus der Arithmetik und Algebra, стр. 46, Кельн 1904.

По поводу этих приемов я должен, однако, вообще высказать требование, что никогда не следует пытаться симулировать невозможные доказательства. Следовало бы, напротив, на простых примерах, сообразно фактическому положению дела, убедить ученика, а, если возможно, то заставить его самого притти к тому, что именно эти положения, основанные на принципе перманентности, способны дать однообразный и удобный алгорифм, между тем как при других правилах всегда придется различать отдельные случаи. Конечно, при этом не нужно проявлять лишней поспешности, нужно дать ученику время освоиться с тем внутренним переворотом, который в нем совершается при этом познании. И в то время как ученику легко понять, что другие положения нецелесообразны, необходимо настойчиво и без остатка выяснить ему, что чудесная сторона дела в том именно и заключается, что действительно существует общее и целесообразное положение; он должен ясно понять, что существования такой системы отнюдь нельзя было с уверенностью вперед ожидать.

Этим я заканчиваю теорию отрицательных чисел и обращусь к учению о дробях.

2. Дроби.

Обращаясь теперь к такому же изложению учения о дробях, мы начнем с того, как трактуется этот вопрос в школе. Здесь дробь $\frac{a}{b}$ с самого начала имеет чисто конкретное значение. Только по сравнению с наглядными образами, которыми интерпретируются целые числа, здесь субстрат меняется, — именно, от количества предметов мы переходим к измерению, от предметов, подлежащих счету, мы переходим к предметам, подлежащим измерению. Примером измеримых многообразий служат с некоторыми ограничениями система монет и система весов и без всяких ограничений, в полной мере — система всех длин. На

этих именно примерах каждому ученику и выясняется значение дробей, ибо каждому человеку очень легко выяснить, что такое $\frac{1}{3}$ метра или $\frac{1}{2}$ фунта. Из конкретных же соображений легко устанавливается также значение соотношений $=, >, <$ для дробей, а также устанавливается сложение и вычитание дробей. Затем умножение выясняется обыкновенно путем незначительной модификации первоначального определения этого действия. *Помножить число на дробь* $\frac{a}{b}$ *значит помножить его на целое число* a (*согласно старому определению*) *и затем разделить на* b. Или иначе, *произведение составляется из множимого совершенно так же, как множитель* $\frac{a}{b}$ *составляется из единицы.* Вслед за этим деление на дробь определяется как операция, обратная умножению: разделить a на $\frac{2}{3}$ *значит найти такое число, которое, будучи умножено на* $\frac{2}{3}$, даст число a. Эти определения в теории дробей мы комбинируем далее с введением отрицательных чисел и таким образом получаем окончательно совокупность всех рациональных чисел. Мы не имеем возможности входить в детали всего этого построения, развитие которого в школе, естественно, требует много времени; мы лучше сравним это изложение с современной разработкой этого вопроса в математике; в виде примеров остановлюсь на приведенных выше сочинениях Вебера-Вельштейна и Буркгардта.

У Вебера-Вельштейна выступает на первый план формальная сторона дела, выдвигающая из различных возможных интерпретаций необходимые общие свойства дробей. *Здесь дробь* $\frac{a}{b}$ *просто является символом (числовой парой), над которой нужно совершать действия согласно определенным правилам.*

Эти правила, которые, как мы упомянули выше, естественно, вытекают из реального значения дробей, имеют

здесь характер совершенно *произвольных соглашений*. Так, например, то, что представляет для ученика наглядное предложение об умножении дробей, приобретает здесь форму *определения равенства*: две дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ называются равными, если $ad = bc$. Аналогичным образом определяется понятие „больше" или „меньше"; *сумма двух дробей* $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ *просто определяется как дробь* $\frac{ad + bc}{bd}$, и т. д. Затем уже доказывается, что определенные таким образом действия в получающейся при этом более обширной числовой области строго подчиняются прежним формальным законам, т. е. одиннадцати основным законам, которые мы уже неоднократно приводили.

Не столь формально, как в системе Вебера-Вельштейна, изложенной здесь, конечно, только в самых общих чертах, трактует этот вопрос Буркгардт. *На дробь* $\frac{a}{b}$ *он смотрит как на последовательность двух операций в области целых чисел, именно, умножение на число* a *и деление на число* b; объектом, над которым эти операции должны быть выполнены, является совершенно произвольное целое число. Если мы последовательно *произведем две такие пары операций* $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$, то это рассматривается как *умножение дробей*. Легко видеть, что происходящая таким образом операция представляет собой не что иное, как умножение на ac и деление на bd. Таким образом правило умножения дробей

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

вытекает здесь из значения дробей и не представляется произвольным соглашением. Совершенно аналогично можно, конечно, определить и развить деление дробей;

однако сложение и вычитание не поддаются интерпретации в этом порядке идей. Формула

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$$

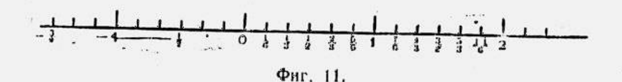
остается, таким образом, и у Буркгардта соглашением, в пользу которого он приводит только наводящие указания.

Сравним теперь школьную постановку вопроса с указанным современным изложением. Существенно важно то, что в этой новой постановке мы как в одной, так и в другой системе остаемся всецело на почве целых чисел. Известными предполагаются только совокупность целых чисел и действия над ними; новые же числа являются только объектами, которые определяются как числовые пары и как операции над целыми числами. Школьное же изложение существенно опирается на новое наглядное представление об измеримых величинах, дающих непосредственное интуитивное представление о дробях. Мы уясним себе это различие лучше всего, если представим себе существо, владеющее только идеей о целом числе и вовсе не знающее измерений. Для такого существа школьное изложение казалось бы совершенно непонятным, между тем как постановка вопроса у Вебера и Вельштейна была бы ему вполне доступна.

Какая же из двух точек зрения лучше и что дает каждая из них? Ответ на этот вопрос будет такой же, как и выше, когда мы разбирали аналогичный вопрос относительно целых чисел. Новая точка зрения, несомненно, чище, но в то же время и беднее. Она, собственно говоря, дает только половину того, что в цельном виде содержит в себе школьное изложение: абстрактное, арифметическое, логически точное введение дробей и действия над ними.

Но когда это исчерпано, то остается еще другой, независимый и не менее важный вопрос: можно ли применить построенную таким образом теоретическую доктрину к наглядным, измеримым величинам, с которыми нам приходится иметь дело. И здесь, конечно, можно было бы смотреть на этот вопрос как на относящийся

к „прикладной математике" и допускающий строго самостоятельную обработку. Представляется, однако, сомнительным, можно ли такое разделение считать целесообразным и с педагогической точки зрения. У Вебера-Вельштейна это разделение задачи на две части находит себе, впрочем, своеобразное выражение: вводя абстрактно действия с дробями, автор затем посвящает отдельную главу под заглавием „отношения" вопросу о том, как рациональные дроби могут быть применяемы к внешнему миру. При этом изложение носит у него более абстрактный, чем наглядный характер.



Фиг. 11.

Я закончу еще настоящее рассуждение о дробях общим замечанием, относящимся к совокупности всех целых чисел; при этом для наглядности я буду пользоваться изображением чисел на прямой линии. Мы представим себе, что на прямой (фиг. 11) отмечены все точки с рациональными абсциссами, которые мы будем короче называть просто „рациональными точками". Говорят, что совокупность всех этих рациональных точек на оси абсцисс образует „всюду плотное множество". Этим хотят сказать, что в каждом интервале, как бы мал он ни был, имеется еще бесчисленное множество рациональных точек. Точнее, не вводя чуждых понятий, можно еще выразить то же самое следующим образом: между двумя рациональными точками имеется еще, по крайней мере, одна рациональная точка. Следствием этого является то обстоятельство, что из совокупности всех рациональных чисел всегда возможно выделить конечную часть, не содержащую ни наибольшего, ни наименьшего элемента. Примером может служить совокупность всех рациональных дробей, содержащихся между нулем и единицей, если самые эти два числа не включать. В самом деле, какова бы ни была правильная дробь, всегда существует еще меньшая

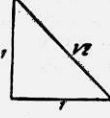
дробь, содержащаяся между нею и нулем, и большая, содержащаяся между нею и единицей. Эти понятия в систематическом развитии относятся уже к канторовой теории многообразий, или множеств. Ниже нам действительно придется воспользоваться рациональными числами с указанными их свойствами, как важным примером множества.

3. Иррациональные числа.

Мы переходим теперь к дальнейшему развитию понятия о числе, именно, к иррациональным числам. Здесь мы не будем останавливаться на том, как этот вопрос излагается в школе, так как относительно иррациональных чисел в школе ограничиваются обыкновенно несколькими примерами. Мы лучше перейдем прямо к историческому развитию вопроса.

Исторически возникновение понятия об иррациональном числе имеет своим источником геометрическую интуицию и потребности геометрии. Представим себе ось абсцисс с нанесенным на ней всюду плотным множеством рациональных точек. На этой оси остаются тогда еще и другие числа, как это, повидимому, показал Пифагор, примерно, следующим образом. Если мы имеем прямоугольный треугольник, в котором два катета равны единице длины, то его гипотенуза равняется $\sqrt{2}$ (фиг. 12); это же, наверное, не рациональное число. В самом деле, если мы положим $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$, где a и b суть числа первые между собой, то мы легко придем к противоречию с известными законами делимости целых чисел. Таким образом мы геометрически построили такой отрезок, отложив который на оси абсцисс от нулевой точки мы придем к точке нерациональной, т. е. к такой точке, которая в прежнем множестве рациональных точек не содержится. Вообще в большинстве случаев гипотенуза $\sqrt{m^2+n^2}$ прямоугольного треугольника, в котором катеты выражаются целыми числами m и n, будет выражена иррациональным числом. Школа Пифагора очень

усердно занималась разысканием таких пар чисел m и n, которым соответствует рациональная гипотенуза; это так называемые пифагоровы числа, простейшим примером которых является группа 3, 4, 5; мы к ним еще возвратимся ниже. Во всяком случае было известно, что при этом построении, вообще говоря, получаются иррациональные отрезки; это открытие стоило жертвы в сто быков, по поводу которой так часто приходится слышать дурные остроты.



Фиг. 12.

Последующие греческие математики изучали более сложные иррациональности; так, например, у Евклида мы находим иррациональности вида $\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ и т. п. Вообще же можно сказать, что они, по существу, сводятся к таким иррациональностям, которые можно получить повторным извлечением квадратного корня и которые, сообразно этому, можно строить циркулем и линейкой. Общей же идеей об иррациональном числе греки еще не владели.

Я должен, однако, еще несколько точнее формулировать это замечание, чтобы избежать недоразумений. Мы имели в виду сказать только то, что греки не владели таким приемом, при помощи которого можно было бы дать общее арифметическое определение иррационального числа, как мы это сделаем ниже. При всем том понятие об общем вещественном числе, которое может и не быть рациональным, для них было ясно,—правда, с иной точки зрения, чем у нас; все это носит у них другой характер, так как они не пользовались буквами для общего обозначения числа. Именно, они рассматривали, как это излагает систематически Евклид, отношения двух произвольных отрезков и оперировали над ними собственно точно так же, как мы теперь оперируем над произвольными вещественными числами. У Евклида встречаются даже такие определения, которые совсем напоминают современную теорию иррациональных чисел. Однако названием своим они уже существенно отличаются от целого рационального числа; последнее называется „ἀριθμός", между тем как отношение отрезков, т. е. любое вещественное число, называется „λόγος".

К этому присоединим еще замечание относительно самого слова „иррациональный". Оно ведет свое начало, вероятно, от неправильного перевода греческого слова „ἄλογος" на латинский язык. Это греческое слово, повидимому, означало „невыговариваемое число". Этим желали сказать, что эти новые числа, т. е. отношения отрезков, не могут быть выражены отношением двух целых чисел [1]; лишь непониманием переводчика объясняется то, что эти числа оказались „нелогичными", как это, повидимому, выражается словом „иррациональные числа". Общее понятие об иррациональном числе появилось, повидимому, только в конце XVI столетия после введения десятичных дробей, употребление которых получило право гражданства в связи с возникновением логарифмических таблиц. Когда мы обращаем рациональную дробь в десятичную, то мы можем, кроме конечных дробей, получать еще бесконечные десятичные дроби, которые, однако, всегда должны быть периодическими [2]). Простейшим примером будет:

$$\frac{1}{3} = 0{,}3333\ \ldots;$$

мы имеем здесь десятичную дробь, однозначный период которой 3 начинается непосредственно после запятой. Но тогда нет препятствий к тому, чтобы представить себе непериодическую десятичную дробь, цифры которой следуют друг за другом, по какому-либо другому определенному закону; каждый, конечно, признает такую дробь определенным и в то же время нерациональным числом. Но в этом, собственно, уже содержится понятие об иррациональном числе, к которому, таким образом, нас непосредственно приводит десятичная дробь. Исторически дело и здесь происходило совершенно так, как мы это выяснили выше относительно отрицательных чисел: вычисления с необходимостью приводили к введению новых понятий, и над ними оперировали, не размышляя много об их сущности

[1]) См. цитируемую выше книгу Tropfke, 2-е изд., Bd. 2, стр. 71.
[2]) Об этом подробнее см. ниже, стр. 60 и след.

и об их обосновании, тем более, что они часто оказывались чрезвычайно полезными.

Лишь в 60-х годах XIX в. была признана потребность в точной арифметической обработке учения об иррациональных числах, что и было выполнено Вейерштрассом (Weierstrass) в его лекциях, относящихся к указанному периоду. Общую теорию иррациональных чисел дал в 1879 г. Г. Кантор (G. Kantor) в Галле, основатель учения о множествах, и независимо от него Р. Дедекинд (R. Dedekind) в Брауншвейге. Точку зрения Дедекинда я намерен пояснить здесь в немногих словах. Допустим, что мы владеем совокупностью всех рациональных чисел, и устраним все пространственные представления, навязывающие нам интуитивно непрерывность числового ряда. Чтобы, исходя отсюда, притти к чисто арифметическому определению иррационального числа, Дедекинд [1]) строит понятие о сечении в области рациональных чисел. Именно, если r есть рациональное число, то оно делит всю совокупность рациональных чисел на две категории A и B таким образом, что каждое число категории A меньше, нежели любое число категории B, каждое же рациональное число принадлежит той или иной категории. Категория A есть совокупность всех чисел, которые меньше числа r, а категория B — совокупность всех чисел, которые больше, нежели r; самое же число r можно отнести как к одной, так и к другой категории. Кроме этих „собственных" сечений бывают еще сечения „несобственные": под этим мы разумеем такие подразделения чисел на две категории, которые обладают перечисленными выше свойствами, но не производятся рациональными числами; иными словами, это — сечения, в которых категория A не имеет наибольшего, а категория B не имеет наименьшего числа. Пример такого рода несобственного сечения дает нам, скажем, $\sqrt{2} = 1{,}414\ \ldots$ или вообще всякая непериодическая бесконечная дробь. Относительно каждого рационального числа мы можем тотчас решить,

[1]) См. Р. Дедекинд. Непрерывность и иррациональные числа. Перевод с немецкого приват-доцента С. Шатуновского, изд. 2-е, Одесса, 1909, „Mathesis". Были и позднейшие издания.

больше ли оно или меньше, чем эта бесконечная десятичная дробь [1]), и сообразно этому отнести каждое рациональное число либо к категории A, либо к категории B. В таком случае ясно, что каждое число категории A меньше каждого числа категории B, а, с другой стороны, в категории A не может быть наибольшего, а в категории B не может быть наименьшего числа, ибо между каждым рациональным числом и нашей бесконечной дробью всегда найдется еще бесчисленное множество других рациональных дробей.

Ввиду этих соображений Дедекинд устанавливает следующее определение, которое с точки зрения строго логической должно быть, конечно, рассматриваемо как чисто условное соглашение. *Каждое сечение в области рациональных чисел мы будем называть рациональным или иррациональным числом, смотря по тому, будет ли это сечение собственным или несобственным.*

К этому непосредственно примыкает определение равенства: *два числа называются равными, если они производят одно и то же сечение в области рациональных чисел.* Исходя из этого определения, можно, например, доказать, что $\frac{1}{3}$ равняется бесконечной десятичной дроби 0,333. . . Тот, кто станет на нашу точку зрения, действительно должен требовать доказательства, основанного на данном определении, хотя человеку, наивно к этому делу подходящему, это может показаться совершенно ненужным. Получить же это доказательство нетрудно, если мы сообразим, что каждое рациональное число, которое меньше $\frac{1}{3}$, при обращении в десятичную дробь рано или поздно даст меньший десятичный знак, чем в нашей бесконечной дроби; всякое же рациональное число, которое больше этой бесконечной дроби, раньше или позже даст больший десятичный знак.

В лекциях Вейерштрасса соответствующее определение гласит так: *два числа называются равными, если они отличаются друг от друга меньше, чем на любое данное число.* Связь между этим определением и предыдущим легко усмотреть. Особенно наглядным представляется последнее определение, если мы сообразим, почему дробь 0,999 . . . = 1: разница, очевидно, меньше, чем 0,1, чем 0,01, . . . ; следовательно, на основании определения, она равна нулю.

Теперь спрашивается, благодаря чему мы имеем возможность ввести в нашу систему иррациональные числа и производить действия над теми и другими числами, совершенно их не различая? Причина кроется в том, что сохраняет силу закон монотонности элементарных операций. Принцип этот заключается в следующем: *если два иррациональных числа нужно сложить, перемножить и т. п., то мы их заключаем во все более и более тесные пределы и над этими пределами соответственно производим те же действия, которые нам нужно произвести над самими иррациональными числами; вследствие закона монотонности и результат последовательно замыкается во все более и более тесные границы.*

Мне нет надобности излагать здесь эти вещи, так как вы можете подробно знакомиться с ними по многим учебникам, лучше всего опять-таки у Вебера-Вельштейна и Буркгардта. Там вы найдете и большие подробности относительно определения иррационального числа, которое я здесь изложил только в общих чертах.

Здесь я предпочел бы остановиться еще на том, чего вы в книгах обыкновенно не найдете: именно на том, как можно перейти от изложенной здесь арифметической теории иррациональных чисел к их применению в других областях. В особенности я имею в виду здесь аналитическую геометрию, которую иногда по наивной интуиции принимают обратно за источник иррациональных чисел и которая психологически действительно является этим источником.

Если мы возьмем ось абсцисс, на которой, как выше, нанесены начало и все рациональные точки, то основное положение, на котором покоится это применение, гласит:

[1]) Для $\sqrt{2}$ это определяется тем, будет ли квадрат этого числа больше или меньше 2.

каждому рациональному или иррациональному числу отвечает точка, имеющая это число своей абсциссой; каждой точке на прямой отвечает в качестве абсциссы рациональное или иррациональное число.

Такого рода исходное положение, которое стоит во главе дисциплины, из которого все дальнейшее вытекает чисто логически, тогда как само оно не может быть логически доказано, мы называем аксиомой. Отдельные математики, в зависимости от сложившихся у них взглядов, смотрят на аксиому как на интуитивно ясную истину или как на более или менее произвольное соглашение. Настоящая аксиома об однозначном соответствии между всеми вещественными числами, с одной стороны, и точками прямой, с другой стороны, обыкновенно называется аксиомой Кантора, который первый точно ее формулировал [1]).

Здесь, именно, будет уместно сказать несколько слов о природе наших пространственных представлений.

Самое это выражение, строго говоря, можно понимать двояко: с одной стороны, можно иметь в виду непосредственное чувственное, эмпирическое представление о пространстве, которое мы контролируем при помощи измерения; с другой стороны,— отвлеченное, внутреннее представление о пространстве, можно было бы сказать, присущую нам идею о пространстве, которая возвышается над неточностью чувственных восприятий. Такого рода различие вообще имеет место при каждом интуитивном воззрении, как я уже имел случай указать при развитии понятия о числе; лучше всего оно выясняется, быть может, следующим примером. Что означает небольшое число 2, 5 или 7, нам непосредственно ясно, но о больших числах, например о числе 2503, мы уже не имеем такого непосредственного, наглядного представления. Здесь, напротив, находит себе применение внутреннее представление о расположенном числовом ряде, которое мы себе составляем, исходя от начальных чисел при помощи совершенной индукции. Что касается представления о пространстве, то дело обстоит так: если мы рассматриваем расстояние между двумя точками, то мы можем оценить и измерить его лишь с ограниченным приближением, так как наш глаз неспособен различать отрезки, падающие ниже некоторой границы; это есть так называемый порог ощущения, понятие, играющее чрезвычайно важную роль во всей психологии. Но по существу дело не изменяется и в том случае, если мы усиливаем наш глаз самыми тонкими инструментами, так как существуют физические свойства, которые лишают нас возможности выйти за известные границы точности. Так, например, оптика учит нас, что длина световой волны, от которой зависит цвет, есть величина порядка 0,001 *мм* (1 микрон). Она обнаруживает далее, что предметы небольшие, по сравнению с этими размерами, не могут быть ясно видимы, потому что никакие инструменты здесь не дают уже оптического изображения, точно воспроизводящего детали. Вследствие этого оптическим путем мы не можем уже различать длины, меньшие одного микрона, так что при выражении длины в *мм* действительное значение могут иметь только первые три десятичных знака. Таким же образом и при всяких других физических наблюдениях и измерениях мы наталкиваемся на такого рода пороги ощущения, которые устанавливают предел возможной точности. Указания, падающие за эти пределы, никакого значения уже не имеют и свидетельствуют о невежестве или даже о недобросовестности.

[1]) „Mathem. Annalen", Bd. V, 1872.

В противоположность этому свойству эмпирического представления о пространстве, необходимо ограниченного известным приближением, абстрактное или идеальное представление о пространстве обладает неограниченной точностью и в силу канторовой аксиомы вполне параллельно арифметическому определению понятия о числе.

Сообразно этому подразделению наших представлений является целесообразным и самую математику разделить на две части: на математику точную и математику приближенную. Выясним это различие на уравнении $f(x)=0$. В приближенной математике, как и в случае наших действительных эмпирических представлений,

здесь речь идет не о том, чтобы $f(x)$ точно обратилось в нуль, а только о том, чтобы значение функции $|f(x)|$ упало ниже достижимого порога точности; таким образом равенство $f(x)=0$ должно служить только сокращенным выражением неравенства:

$$|f(x)|<\varepsilon,$$

с которым фактически и приходится иметь дело. Выполнить же строго требование равенства $f(x)=0$ составляет уже задачу *точной* математики. Так как в приложениях играет роль только приближенная математика, то можно, выражаясь грубо, сказать, что нужду мы имеем собственно в этой последней дисциплине, между тем как точная математика существует только для удовольствия тех, которые ею занимаются, а в остальном составляет лишь опору для математики приближенной.

Возвращаясь опять к нашей теме, я должен сказать, что *логическое определение иррационального числа, несомненно, относится к точной математике.* В самом деле, утверждение, что две точки отстоят друг от друга на расстояние, выражающееся иррациональным числом миллиметров, фактически не имеет никакого смысла, так как десятичные знаки дальше шестого не имеют реального значения. *В практике мы можем таким образом, свободно заменять иррациональные числа рациональными.* На первый взгляд это находится в противоречии с законом рациональных указателей в кристаллографии, или например, с тем обстоятельством, что в астрономии приходится отличать случаи, существенно разные, когда времена оборотов двух планет имеют рациональное или иррациональное отношение. В действительности же здесь опять проявляется только многозначность нашего языка, так как здесь понятия рациональное и иррациональное нужно понимать в совершенно другом смысле,—именно в смысле, свойственном *приближенной математике.* Когда здесь говорят, что величины имеют рациональное отношение, то под этим разумеют, что их отношение выражается парой небольших чисел,—например $\frac{3}{7}$. Такое же отношение, как $\frac{2012}{7053}$ здесь, несомненно, отнесли бы уже к иррациональным.

Насколько, собственно, велики могут быть числитель и знаменатель, это меняется от случая к случаю, в зависимости от условий вопроса.

Все эти интересные соображения развиты мною в лекциях, читанных в весеннем семестре 1901 г. и изданных под названием: „Anwendung der Differential und Integralrechnung auf Geometrie, eine Revision der Prinzipien“ (Ausgearb. v. C. H. Müller).

В двух словах я хотел бы еще указать, в заключение, как я себе представляю желательное изложение этих вещей в школе. Точное изложение теории иррациональных чисел здесь вряд ли уместно, так как она не может быть интересна для большинства учеников. Юноша, несомненно, всегда удовлетворится указанием ограниченного приближения; точность же в 0,001 *мм* уже вызовет удивление, а потребности в полной точности у него, несомненно, не будет. Вследствие этого будет вполне достаточно, если в школе выяснить иррациональное число только на общих примерах, как это большею частью и делают. Конечно, немногие юноши, обладающие ясно выраженным математическим дарованием, этим не удовлетворятся и захотят вникнуть глубже в сущность вопроса. Достойной задачей учителя будет удовлетворить эту потребность, не нарушая интересов большинства учеников.

III. ОСОБЫЕ СВОЙСТВА ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ.

Мы начнем теперь новую главу, которую мы посвятим собственно учению о целых числах, теории чисел, или арифметике в более узком смысле этого слова.

Я прежде сделаю сводку отдельных вопросов, в которых эта дисциплина соприкасается со школьным преподаванием.

1. Первой задачей теории чисел является вопрос о делимости: делится ли одно число на другое?

2. Можно указать простые правила, которые дают возможность легко распознать, делится ли произвольное число на небольшие числа, как 2, 3, 4, 5, 9, 11 и т. д.

3. Имеется бесчисленное множество простых чисел, т. е. таких, которые не имеют собственных делителей иными

словами, которые делятся только на себя и на единицу: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, . . .

4. Мы владеем всеми соотношениями, касающимися делимости любых чисел, если мы знаем их разложение на простых множителей.

5. Теория чисел играет роль в вопросе об обращении рациональных дробей в десятичные: она поясняет, почему десятичная дробь должна стать периодической и как велик период.

Эти вопросы появляются уже в младших классах; позже вопросы теории чисел появляются только спорадически. Во всяком случае, приходится встречать следующее:

6. Если и не во всех школах, то, во всяком случае, во многих излагаются непрерывные дроби.

7. Иногда излагаются диофантовы уравнения, т. е. уравнения со многими неизвестными, при разрешении которых мы ограничиваемся целыми значениями неизвестных. В виде примера я приведу пифагоровы числа, о которых мы имели уже случай говорить. Как известно, здесь речь идет о системах целых решений уравнения:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

8. В тесной связи с теорией чисел находится вопрос о делении окружности на равные части, хотя этот вопрос вряд ли когда-либо разбирается в школе. Если нам нужно разделить окружность на n равных частей,— разумеется, пользуясь всегда только циркулем и линейкой, — то это легко удается при $n = 2$, 3, 4, 5, 6. Но при $n = 7$ это уже не удается, и учитель обыкновенно почтительно останавливается на этом пункте, не высказывая даже категорически того, что это выполнить вовсе невозможно. Причина этого обстоятельства коренится в глубоких соображениях теории чисел. Чтобы избежать недоразумений, с которыми, к сожалению, в этом именно вопросе приходится довольно часто встречаться, я еще раз подчеркну, что здесь мы вновь имеем дело с вопросом точной математики, не имеющим для практических применений никакого значения. Для практических целей вряд ли кто-либо станет пользоваться точным построением даже в тех случаях, когда это возможно. Напротив, будет гораздо целесообразнее, оставаясь на почве приближенной математики, простыми и умело подобранными испытаниями разделить окружность на любое число равных частей; при этом можно легко достигнуть всякой практически доступной точности. Так, несомненно, поступает каждый механик, которому нужно строить инструменты с разделенными кругами.

9. Еще в одном месте в школе приходится столкнуться с высшей теорией чисел — именно, в вопросе о квадратуре круга и связанным с ним вычислением π. При изложении этого отдела тем или иным путем вычисляют первые десятичные знаки числа π, а затем, несомненно, упоминают о современном доказательстве трансцендентности числа π, решающем древнюю задачу о квадратуре круга при помощи циркуля и линейки в отрицательном смысле. В конце своего курса я возвращусь к этому доказательству, здесь же я ограничусь точной формулировкой этого утверждения; дело сводится к тому, что число π не может удовлетворять никакому алгебраическому уравнению с целыми коэфициентами вида:

$$a\pi^m + b\pi^{m-1} + c\pi^{m-2} + \ldots + k\pi + l = 0.$$

То обстоятельство, что коэфициенты должны быть целыми числами, играет здесь особую роль; оно именно и относит этот вопрос к теории чисел.

Само собой разумеется, что и здесь мы имеем дело с вопросом точной математики, ибо для нее только и имеет значение числовой характер π. Для математика, ограничивающегося приближением, достаточно определить первые десятичные знаки, которые дают ему возможность произвести квадратуру круга с любой доступной нам точностью.

Этим исчерпывается роль теории чисел в школе. Спросим еще, какое место она занимает в университетском преподавании и в научном исследовании. Я склонен разделить математиков, занимающихся самостоятельными исследованиями, по их отношению к теории чисел — на две категории; одних я назову энтузиастами, других индиферентными. Для первых не существует никакой науки, которая была бы так прекрасна и так важна, как теория

чисел, — никакой науки, которая давала бы столь ясные и точные доказательства и теоремы такой безукоризненной строгости. „Если математика есть царица наук, то теория чисел есть царица математики“, — говорит Гаусс. Индиферентные же стоят далеко от теории чисел, очень мало заботятся о ее развитии и стараются вовсе ее избегать. Большинство изучающих математику по своим симпатиям относится к последней категории.

Причина этого замечательного разделения, по моему мнению, коренится в следующем: с одной стороны, теория чисел, несомненно имеет основное значение для всякого глубокого математического исследования. Необычайно часто мы наталкиваемся, исходя из совершенно различных областей, на сравнительно простые арифметические факты. Но, с другой стороны, чистая теория чисел является крайне абстрактной дисциплиной; способностью же воспринимать с удовольствием весьма абстрактные вещи обладают немногие. Уже это обстоятельство само по себе могло бы содействовать безучастности, которую проявляют многие к теории чисел. Но это еще усиливается тем, что в современных сочинениях по теории чисел предмет излагается обыкновенно чрезвычайно абстрактно. Я полагаю, что теория чисел сделалась бы гораздо более доступной и встретила бы гораздо больше интереса к себе, если бы ее излагали наглядно и на подходящих фигурах. Ее предложения, конечно, не зависят от этих вспомогательных средств, но они могли бы много содействовать пониманию. Эту точку зрения я и старался провести в лекциях, читанных мною в 1905/1906 учебном году[1]). Ту же цель имеет в виду Минковский в своей книге „О диофантовых приближениях“ [2]). Мои лекции носят более элементарный, вводный характер, тогда как Минковский скоро углубляется в специальные задачи.

Что касается учебников по теории чисел, то вы можете, собственно, вполне ограничиться тем материалом,

[1]) „Ausgewählte Kapitel aus der Zahlentheorie“ (Ausgegeben von A. Sommerfeld und P. Furtwängler). Нов. изд. 1907 г.

[2]) H. Minkowsky, Diophantische Approximationen. Eine Einführung in die Zahlentheorie, Leipzig 1907.

который вы находите в учебниках алгебры. Из числа же специальных сочинений я охотнее всего рекомендовал бы вам новую книгу Бахмана: „Основания новой теории чисел“[1]).

Разъяснения, специально относящиеся к теории чисел, я хотел связать с упомянутыми выше вопросами и постараюсь изложить их возможно более наглядно. Само собой разумеется, что я попрежнему имею в виду тот материал, который, по моему мнению, должен знать учитель, и отнюдь не думаю, чтобы весь этот материал можно было непосредственно в той же форме сообщать ученику. Я должен указать на опыт, вынесенный мною из учительских экзаменов. Мне пришлось убедиться, что в большинстве случаев кандидаты на учительское звание ограничиваются лишь ходячими выражениями, не имея сколько-нибудь серьезных сведений в этой области. Что π есть трансцендентное число — это говорит, конечно, каждый; но что это, собственно, означает, это знают уже немногие. Раз я получил даже и такой ответ, что π не есть ни рациональное, ни иррациональное число. Точно так же довольно часто приходится встречать экзаменующихся, которые знают, правда, что имеется бесчисленное множество простых чисел, но не имеют ни малейшего представления о доказательстве этого предложения.

С этого последнего доказательства я и начну; при этом те простые вещи, которые содержатся в пунктах 1 и 2 предыдущего перечисления, я буду считать известными. Упомяну еще, что исторически доказательство этого предложения принадлежит Евклиду, „Начала“ (по-гречески Στοιχεῖα) которого содержат не только систему геометрии, но также алгебраические и арифметические факты, часто облеченные в геометрические формы.

Евклидов прием доказательства указанного предложения заключается в следующем. Положим, что ряд простых чисел ограничен и исчерпывается числами 2, 3, 5, . . . , p; в таком случае число $N = (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \ldots p) + 1$,

[1]) P. Bachman, Grundlagen der neueren Zahlentheorie. Sammlung Schubert, № 53, Leipzig 1907.

очевидно, не делится ни на 2, ни на 3, . . ., ни на p, так как при делении на каждое из этих чисел мы получаем в остатке единицу. Поэтому должно иметь место одно из двух: либо это есть простое число, либо существуют простые числа, отличные от 2, 3, . . ., p. Но то и другое противоречит нашему предположению, и теорема, таким образом, доказана.

Что касается четвертого пункта — разложения чисел на простые множители, то я хочу показать вам одну из старейших таблиц разложения, принадлежащую Чермаку[1]). Эти обширные полезные таблицы с исторической точки зрения заслуживают тем большего внимания, что они в высокой степени точны. Название таблиц происходит от переданного нам еще из древности термина „решето Эратосфена“. Основанием для этого термина послужило представление, что мы из всего натурального ряда чисел последовательно просеиваем те, которые делятся на 2, 3, 5, . . ., так что, в конце концов, остаются только простые числа. Чермак дает разложение на простые множители чисел, не делящихся на 2, 3 или 5 и доводит свою таблицу до 1 020 000. При этом все простые числа отмечены горизонтальной чертой и в таких высоких пределах приведены в этом сочинении в первый раз. Впрочем, в XIX в. вычисление простых чисел продолжено значительно дальше и доведено до 9-го миллиона.

Обращаюсь теперь к пятому пункту, именно к *обращению рациональных дробей в десятичные*. Подробную теорию вы найдете в книге Вебера-Вельштейна; я же хочу выяснить здесь только принципы этой теории на простейшем типичном примере. Рассмотрим дробь $\frac{1}{p}$, где p есть простое число, отличное от 2 и 5; мы покажем, что дробь $\frac{1}{p}$ *развертывается в бесконечную периодическую дробь, и что число цифр δ периода есть наименьший показатель, при котором 10^δ дает при делении на p в остатке 1, или*, выражаясь языком теории чисел: *δ есть наимень-*

[1]) Chernac, Cribrum arithmeticum, Daventriae 1811. По-русски „арифметическое решето“.

ший показатель, при котором имеет место сравнение:

$$10^\delta \equiv 1 \pmod{p}.$$

Доказательство прежде всего предполагает известным, что такое сравнение всегда возможно; это устанавливается так называемой *малой теоремой Ферма*, заключающейся в том, что при всяком простом p, не делящем числа 10,

$$10^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

На доказательстве этого основного предложения, служащего постоянным орудием исследования всякому математику, я здесь не буду останавливаться. Далее, из теории чисел мы должны заимствовать еще предложение, что *наименьший показатель δ, о котором идет выше речь, либо равен числу $p-1$, либо есть делитель этого числа*. Это мы можем применить к нашему числу p и получим, таким образом, что

$$\frac{10^\delta - 1}{p}$$

есть целое число N, так что

$$\frac{10^\delta}{p} = \frac{1}{p} + N.$$

Если мы поэтому представим себе дроби $\frac{1}{p}$ и $\frac{10^\delta}{p}$ обращенными в десятичные, то соответствующие десятичные знаки должны будут совпадать, так как разность между этими дробями есть целое число. Так как с другой стороны, дробь $\frac{10^\delta}{p}$ получается из дроби $\frac{1}{p}$ перенесением запятой вправо на δ десятичных знаков, то отсюда следует, что от такого перенесения запятой десятичные знаки дроби $\frac{1}{p}$ не изменяются, иными словами, что *десятичные знаки дроби $\frac{1}{p}$ представляют собой последовательное повторение периода, состоящего из δ цифр*. Теперь покажем, что не может быть меньшего периода, состоящего из $\delta' < \delta$ цифр. Для

этого нам достаточно обнаружить, что число цифр δ' каждого периода удовлетворяет сравнению $10^{\delta'} \equiv 1$, ибо нам известно, что δ есть наименьшее решение этого сравнения [1]). Это доказательство представляет собой простое обращение прежнего рассуждения. В самом деле, из условия следует, что дроби $\frac{1}{p}$ и $\frac{10^{\delta'}}{p}$ имеют одни и те же десятичные знаки; следовательно, разность этих дробей $\frac{10^{\delta'}}{p} - \frac{1}{p}$ есть целое число N, а потому $10^{\delta'} - 1$ делится на p; таким образом, действительно, $10^{\delta'} \equiv 1 \pmod{p}$; этим вполне исчерпывается доказательство.

Я приведу еще некоторые возможно более простые и поучительные примеры, из которых вы увидите, что δ в различных случаях действительно может принимать все возможные значения, как меньшие $p-1$, так и равные $p-1$. Заметим прежде всего, что для дроби $\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$ число десятичных знаков $\delta = 1$; в самом деле, уже $10^1 \equiv 1 \pmod 3$. Далее мы находим, что для дроби $\frac{1}{11} = 0{,}09\ldots$ $\delta = 2$ и, соответственно этому,

$$10^1 \equiv 10, \quad 10^2 \equiv 1 \pmod{11}.$$

Наивысшее значение $\delta = p - 1$ мы встречаем при разложении дроби

$$\frac{1}{7} = 0{,}142857\ 142857\ldots;$$

здесь $\delta = 6$. И действительно, нетрудно видеть, что по модулю 7

$10^1 \equiv 3$, $10^2 \equiv 2$, $10^3 \equiv 6$, $10^4 \equiv 4$, $10^5 \equiv 5$ и, наконец, $10^6 \equiv 1$.

Я хочу также несколько остановиться на вопросе, содержащемся в шестом пункте предыдущего перечисления, именно, на **непрерывных дробях**. При этом я не буду здесь, однако, приводить обыкновенного отвлеченного арифметического изложения, которое вы найдете во многих других сочинениях, например у Вебера-Вельштейна. Напротив, я воспользуюсь случаем, чтобы вам показать, какую ясную и понятную форму приобретают вопросы теории чисел при наглядном геометрическом их изложении. К тому же, прибегая к этим геометрическим приемам в области теории чисел, мы возвращаемся только к тем путям, по которым шли Гаусс и Дирихле. Лишь новейшие математики, начиная, примерно, с 1860 г., изгнали эти методы из теории чисел. Само собой разумеется, что здесь я имею возможность кратко привести только ход рассуждений и важнейшие теоремы без доказательств; я естественно предполагаю также, что начала элементарной теории непрерывных дробей вам небезызвестны. Впрочем, обстоятельное изложение вы можете найти в моих литографированных лекциях по теории чисел [1]).

Вы знаете, как развертывается данное положительное число ω в непрерывную дробь: мы выделяем наибольшее целое число n_0, содержащееся в ω, и полагаем:

$$\omega = n_0 + r_0,$$

где

$$0 \leqslant r_0 < 1;$$

далее с дробью $\frac{1}{r_0}$ мы поступаем так же, как с числом ω.

$$\frac{1}{r_0} = n_1 + r_1,$$

где

$$0 \leqslant r_1 < 1,$$

и этот процесс ведем дальше:

$$\frac{1}{r_1} = n_2 + r_2, \qquad 0 \leqslant r_2 < 1,$$

$$\frac{1}{r_2} = n_3 + r_3, \qquad 0 \leqslant r_3 < 1,$$

. . . .

Если ω есть **рациональное** число, то этот процесс обрывается после конечного числа ступеней; если же ω есть **иррациональное** число, то процесс продолжается

[1]) Если это предложение будет доказано и мы допустим, что существует период, содержащий $\delta' < \delta$ цифр, то будет существовать число $\delta' < \delta$, при котором $10^{\delta'} \equiv 1 \pmod p$; это противно условию. *Ред.*

[1]) См. также II том собрания математических сочинений Клейна: F. Klein, „Gesammelte mathematische Abhandlungen", Bd. II, Berlin 1922, стр. 209 — 211.

бесконечно. Во всяком случае мы будем писать кратко: „разложение числа ω в непрерывную дробь":

$$\omega = n_0 + \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3 + \dots}}}$$

В виде примера приведу разложение в непрерывную дробь числа π:

$$\pi = 3{,}14159265\ldots = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \dots}}}}$$

Если мы оборвем непрерывную дробь на первом, втором, третьем... частном, то мы получим рациональные, так называемые „подходящие дроби":

$$n_0 = \frac{p_0}{q_0},\quad n_0 + \frac{1}{n_1} = \frac{p_1}{q_1},\quad n_0 + \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2}} = \frac{p_2}{q_2}, \ldots$$

Эти дроби представляют собою чрезвычайно хорошие приближения к числу ω; выражаясь точнее, каждая из них дает самое лучшее приближение, какого только возможно достигнуть, не увеличивая знаменателя приближенной дроби.

Благодаря этому свойству подходящих дробей теория непрерывных дробей приобретает практически важное значение во всех тех случаях, где нужно выразить иррациональные числа или даже рациональные дроби, но имеющие больших знаменателей (например десятичные дроби со многими знаками), возможно простыми дробями, т. е. дробями с возможно меньшими знаменателями. Насколько хорошее приближение мы получаем, можно видеть

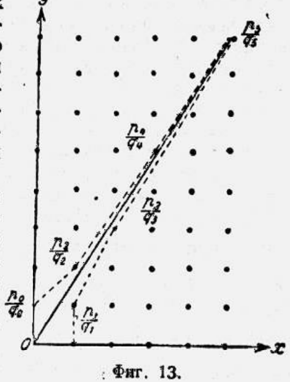
из следующей таблички, содержащей обратное перечисление первых подходящих числа π в десятичные дроби.

$$\pi = 3{,}14159265\ldots$$

$$\frac{p_0}{q_0} = 3,\quad \frac{p_1}{q_1} = \frac{22}{7} = 3{,}14285\ldots;\quad \frac{p_2}{q_2} = \frac{333}{106} = 3{,}141509\ldots,$$

$$\frac{p_3}{q_3} = \frac{355}{113} = 3{,}14159292\ldots$$

Кстати, вы замечаете на этих примерах, что подходящие дроби попеременно то больше π, то меньше этого числа; это есть, как известно, общее свойство подходящих дробей: развертывая число ω в непрерывную дробь, мы заключаем его при помощи подходящих дробей в пределы, постоянно суживающиеся сверху и снизу.



Фиг. 13.

Оживим теперь все эти вещи при помощи геометрического образа. С этою целью представим себе в положительном квадранте плоскости xy ов (предполагая, что мы ограничиваемся положительными числами) все точки, которые имеют координатами целые числа: они образуют так называемую „сеть точек" [1]). Будем рассматривать эту сеть — я мог бы даже сказать это „звездное небо" — точек из начала координат O (фиг. 13). Луч, идущий от начала к точке $x = a$, $y = b$, имеет уравнение:

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b},$$

и обратно, на каждом луче $\frac{x}{y} = \lambda$, где λ есть рациональ-

[1]) „Punktgitter" — сравнительно новый термин, который был введен Г. Минковским. *Ред.*

ное число $\frac{a}{b}$, лежит бесчисленное множество целочисленных точек (ma, mb), где m есть произвольное целое число. Таким образом из точки O во всех возможных рациональных направлениях и только в этих направлениях мы видим точки нашей решетки; поле зрения повсюду плотное и заполнено „звездами", но оно еще не свободно от пробелов; оно не заполнено ими непрерывно, оно как бы напоминает „млечный путь". На иррациональном луче $\frac{x}{y} = \omega$, где ω есть число иррациональное, не лежит, следовательно, ни одна целочисленная точка — факт, замечательный уже и сам по себе. Но, очевидно, такого рода прямая, выражаясь термином, напоминающим дедекиндово определение иррациональных чисел, производит сечение в области всех целочисленных точек; именно, она разбивает их на две группы точек, расположенных справа и слева от прямой. Если мы спросим себя теперь, где же у нашего луча отделяются друг от друга эти группы, то мы придем к чрезвычайно интересному свойству разложения числа ω в непрерывную дробь. Именно, если мы отметим точки $x = p_r$, $y = q_r$, соответствующие каждой подходящей дроби $\frac{p_r}{q_r}$ в разложении числа ω (p_r и q_r суть числа первые между собой), то лучи, идущие к этим точкам, должны все ближе и ближе подходить к лучу $\frac{x}{y} = \omega$ и притом попеременно, то с одной, то с другой стороны; это приближение должно происходить с такой же быстротой, с какой дробь $\frac{p_r}{q_r}$ приближается к иррациональному числу ω. Развитие этой идеи приводит к следующей теореме, которую нетрудно доказать, пользуясь известными в теории чисел свойствами чисел p_r и q_r.

Представим себе, что во все целочисленные точки воткнуты штифтики или булавки, как на китайском бильярде. Каждую из двух групп булавок, расположенных справа и слева от луча $\frac{x}{y} = \omega$, мы обведем нитью; если мы натянем каждую нить так, чтобы она охватывала соответствующую группу булавок и прилегала вплотную к ближайшим, то она примет форму выпуклой ломаной линии; вершинами этой ломаной именно и будут служить точки p_r, q_r, координатами которых служат соответственные числители и знаменатели подходящих дробей; при этом слева будут лежать точки, отвечающие четным подходящим дробям, а справа — нечетным.

Этим путем мы приходим к новому и, нужно сказать, чрезвычайно наглядному геометрическому определению разложения числа в непрерывную дробь. Приведенная выше фиг. 13 относится к случаю

$$\omega = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}$$

т. е. к иррациональному числу, выражающему отношение сторон правильного десятиугольника к радиусу. Здесь первыми вершинами двух ломаных линий будут:

слева: $p_0 = 0$, $q_0 = 1$; $p_2 = 1$, $q_2 = 2$; $p_4 = 3$, $q_4 = 5, \ldots$;
справа: $p_1 = 1$; $q_1 = 1$; $p_3 = 2$; $q_3 = 3$; $p_5 = 5$, $q_5 = 8 \ldots$;

Для числа π значения p_r, q_r возрастают гораздо быстрее, так что нанести соответствующую фигуру на чертеж было бы довольно трудно. Полное же доказательство указанного предложения вы можете найти в упомянутых выше моих литографированных лекциях.

Я перехожу теперь к седьмому пункту, к учению о так называемых пифагоровых числах; здесь мы опять воспользуемся наглядными представлениями, но в несколько иной форме. Задача о пифагоровых числах заключается, как известно, в том, чтобы найти целые числа, удовлетворяющие уравнению:

$$a^2 + b^2 = c^2. \qquad (1)$$

Положив

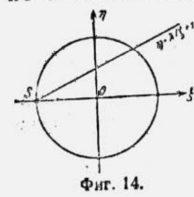
$$\frac{a}{c} = \xi, \quad \frac{b}{c} = \eta, \qquad (2)$$

мы рассмотрим вместо уравнения (1) уравнение:

$$\xi^2 + \eta^2 = 1, \qquad (3)$$

к которому оно приводится при помощи преобразования (2); нам нужно, следовательно, разыскать все рациональные дроби, удовлетворяющие этому уравнению. Имея это в виду, мы рассмотрим совокупность всех рациональных точек на плоскости (т. е. всех точек, которые имеют рациональные координаты ξ, η); точки эти образуют в плоскости всюду плотное множество [1]).

Уравнение (3) выражает окружность на плоскости, описанную из начала координат радиусом, равным единице; наша задача сводится к тому, чтобы определить, как проходит наша окружность в этом плотном множестве рациональных точек, какие из них она содержит. Некоторые из рациональных точек, принадлежащих окружности, мы хорошо знаем наперед: сюда относятся, например, точки ее пересечения с четырьми осями. Но мы остановимся предпочтительно на точке S ($\xi = -1$, $\eta = 0$; фиг. 14). Представим себе все лучи, проходящие через точку S; они выражаются уравнением:



Фиг. 14.

$$\eta = \lambda\,(\xi + 1). \tag{4}$$

Каждый из этих лучей мы будем называть рациональным или иррациональным, смотря по тому, имеет ли параметр λ рациональное значение или иррациональное. Теперь нетрудно доказать следующее двойное предложение: каждая рациональная точка окружности проектируется из точки S рациональным лучом, и, обратно — каждый рациональный луч (4), пересекает окружность в рациональной точке.

Первая половина непосредственно ясна [2]). Вторую мы докажем прямым вычислением. Именно, подставляя вы-

[1]) См. стр. 45.

[2]) В самом деле, если прямая (4) проходит через какую бы то ни было рациональную точку ξ_0, η_0, отличную от S, то в ее уравнении $\lambda = \dfrac{\eta_0}{\xi_0 + 1}$, т. е. λ имеет рациональное значение. *Ред.*

ражение (4) для η в уравнение (3), мы получим для абсциссы точки пересечения уравнение:

$$\xi^2 + \lambda^2\,(\xi + 1)^2 = 1,$$

или

$$(1 + \lambda^2)\,\xi^2 + 2\lambda^2\xi + \lambda^2 - 1 = 0.$$

Но один корень ($\xi = -1$), соответствующий точке S, нам известен; для другого корня мы простым вычислением получаем выражение:

$$\xi = \frac{1 - \lambda^2}{1 + \lambda^2}; \tag{5a}$$

а тогда уравнение (4) дает для ординаты:

$$\eta = \frac{2\lambda}{1 + \lambda^2}; \tag{5b}$$

при рациональном λ мы, таким образом, действительно получаем рациональную точку пересечения.

Доказанное таким образом предложение можно еще выразить так: все рациональные точки нашей окружности выражаются формулами (5), где λ обозначает любое рациональное число. Этим наша задача собственно решена; нам остается только сделать переход к целым числам. Для этого мы полагаем:

$$\lambda = \frac{n}{m},$$

где n и m суть целые числа; тогда выражения (5) принимают вид:

$$\xi = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}, \quad \eta = \frac{2mn}{m^2 + n^2}.$$

Это будет общий вид всех рациональных решений уравнения (3). Совокупность всех целых решений первоначального уравнения (1), т. е. все пифагоровы числа, содержатся, стало быть, в формулах:

$$a = m^2 - n^2, \quad b = 2mn, \quad c = m^2 + n^2;$$

мы получаем отсюда все решения, не имеющие общих делителей, если числа m и n про-

бегают через все пары чисел, первых между собой.

Мы пришли, таким образом, к чрезвычайно наглядному решению этого вопроса, которое обыкновенно получается при помощи весьма абстрактных соображений.

Здесь я хочу кстати остановиться на так называемой „великой теореме Ферма“. Я поступлю совершенно в духе древних геометров, если перенесу вопрос о пифагоровых числах, приноровленный в обыкновенной его постановке к плоскости, в пространство трех и более высокого числа измерений, и именно следующим образом: возможно ли, чтобы сумма кубов двух целых чисел представляла собой полный куб? или возможно ли, чтобы сумма четвертых степеней представляла собой полную четвертую степень? Вообще, может ли уравнение

$$x^n + y^n = z^n$$

при любом целом n быть разрешено в целых числах? Ферма дал отрицательный ответ на этот вопрос; ответ этот заключается в следующей теореме, носящей имя ее автора: уравнение

$$x^n + y^n = z^n$$

не имеет целых решений ни при каком n, большем 2.

Позвольте мне начать с некоторых исторических сведений. Ферма жил от 1608 до 1665 г. и был в Тулузе советником парламента,— стало быть, юристом. Но он много занимался математическими вопросами и притом настолько плодотворно, что его следует отнести к числу величайших математиков. Ферма может быть вполне заслуженно отнесен к числу основателей аналитической геометрии, исчисления бесконечно-малых и теории вероятностей; но особенно важное значение имеют его труды в области теории чисел. Однако все результаты, полученные им в этой области, оставлены им в виде пометок на полях экземпляра Диофанта, знаменитого эллинского математика, написавшего книгу по теории чисел около 300-го года н. э., т. е. приблизительно через 600 лет после Евклида. Эти заметки Ферма были опубликованы его сыном лишь через 5 лет после его смерти; он сам при жизни их не печатал. Среди этих заметок имеется также и „великая теорема“, о которой теперь идет речь, с припиской: я нашел „воистину удивительное доказательство, но за недостатком места не могу его здесь привести“ [1]). Однако по настоящее время не удалось найти доказательства этого предложения.

Чтобы несколько ближе ориентироваться в содержании этой теоремы Ферма, мы, как и в случае $n = 2$, попытаемся сначала найти рациональные решения уравнения:

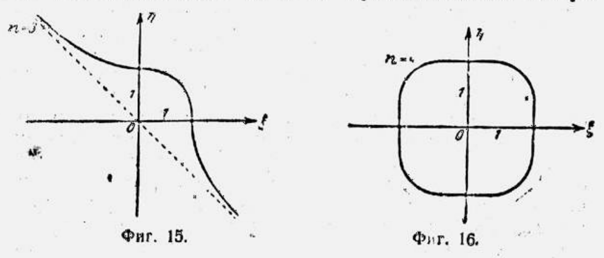
$$\xi^n + \eta^n = 1,$$

т. е. постараемся выяснить себе положение выражаемой этим уравнением кривой относительно рациональных точек плоскости. Фиг. 15 и 16 приблизительно изображают кривые, соответствующие значениям $n = 3$ и $n = 4$. Они, во всяком случае, содержат точки

$$\xi = 0,\ \eta = 1 \text{ и } \xi = 1,\ \eta = 0$$

и при $n = 4$ соответственно точки

$$\xi = 0,\ \eta = \pm 1 \text{ и } \xi = \pm 1,\ \eta = 0.$$



Фиг. 15. Фиг. 16.

Утверждение Ферма сводится, таким образом, к тому, что эти кривые в противоположность рассмотренной выше окружности извиваются во всюду плотном множестве рациональных точек, не проходя ни через одну его точку, кроме упомянутых выше.

[1]) См. издание сочинений Ферма Парижской Академии, „Oeuvres de Fermat“, т. III (Paris 1896), p. 241.

Интерес этого предложения заключается прежде всего в том, что полного его доказательства до сих пор никому не удалось найти, несмотря на все употребленные к этому усилия. Что касается попыток доказательства этого предложения, то здесь на первом месте приходится назвать Куммера (Kummer), существенно подвинувшего вопрос вперед. Куммер привел этот вопрос в связь с теорией алгебраических чисел, в частности, с числами, к которым приводит задача о делении окружности на равные части. Пользуясь корнем n-й степени из единицы

$$\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}} = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n},$$

можно разложить разность $z^n - y^n$ на линейных множителей; уравнение Ферма принимает тогда вид:

$$x^n = (z - y)(z - \varepsilon y)(z - \varepsilon^2 y)\ldots(z - \varepsilon^{n-1} y);$$

иными словами, n-я степень числа должна разлагаться на множителей, которые указанным выше способом составляются из чисел y и z и из числа ε. Для такого рода чисел Куммер построил теории, совершенно аналогичные тем, которые издавна известны для целых чисел: он построил понятие о делимости этих чисел, о разложении числа на простых множителей и т. д. Сообразно этому мы говорим теперь о целых алгебраических числах и, в частности, о целых числах, к которым приводит задача о делении окружности на равные части. С точки зрения Куммера предложение Ферма является теоремой о разложении на множителей в области чисел ε [1]. Исходя из этих соображений, он и пытается доказать теорему. Это ему действительно удалось для значительного большинства значений показателя n; в частности, например, предложение им доказано для всех показателей, которые меньше 100. Но между большими числами оказываются исключения, освободиться от которых не удалось ни ему, ни крупнейшим математикам, следовавшим его пути. Я вынужден здесь естественно ограничиться этими указаниями; подробности о состоянии этой задачи вы найдете в „Математической энциклопедии", в конце реферата Гильберта „О теории алгебраических чисел". Гильберт сам принадлежит к числу тех, которые продолжали и развили исследования Куммера [1].

[1]) Область целых чисел ε есть совокупность всех чисел вида:

$$a_0 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + \ldots + a_{n-1}\varepsilon^{n-1},$$

где ε есть указанный выше корень n-й степени из единицы.

Вряд ли можно сомневаться, что „удивительное" доказательство Ферма не падало в эту область идей. Трудно думать, чтобы он владел операциями над алгебраическими числами в ту пору, когда относительно мнимых чисел математики еще не были достаточно ориентированы,— когда была еще в зачаточном состоянии самая теория чисел, которая именно благодаря глубоким исследованиям Ферма получила импульс к дальнейшему развитию. С другой стороны, очень мало вероятно, чтобы такой математик, как Ферма, в своем доказательстве допустил ошибку, хотя такого рода случаи и бывали у величайших математиков. Нужно думать поэтому, что он нашел доказательство благодаря какой-либо особенно удачной, простой идее. Но так как мы не имеем никаких указаний, которые позволили бы доискаться этой идеи, то полного доказательства теоремы Ферма можно, повидимому, ожидать только путем систематического развития работ Куммера.

Эти вопросы в настоящее время особенно привлекают внимание потому, что Гёттингенское ученое общество располагает в настоящее время премией в 100 000 марок за разрешение задачи Ферма. Это есть завещание, скончавшегося около года тому назад, математика Вольфскеля из Дармштадта, который, вероятно, всю жизнь занимался этим вопросом и оставил часть своего громадного состояния счастливцу, которому удастся либо доказать это предложение во всей его общности, либо опровергнуть его одним противоречащим ему примером [2]). Однако

[1]) Сводное изложение элементарных исследований, относящихся к теореме Ферма, можно найти в сочинении P. Bachmann, „Теорема Ферма", Берлин 1919. См. также русское сочинение А. Я. Хинчина „Великая теорема Ферма". Москва 1927. 2-е изд. 1932 г.

[2]) Подробное изложение условий соискания премии было опубликовано в „Nachrichten der Geselschaft der Wissenschaft zu Göttingen-geschäftliche Mitteilungen 1908 стр. 103 и перепечатано во многих математических журналах. См., например, Mathematische Annalen, Bd. 66, стр. 143; Journal für Mathematik, Bd. 134, стр. 313. Нужно, впрочем, отметить, что свою валютную ценность премия давно утратила.

разыскать такой пример, конечно, нелегко, так как для показателей, не превышающих ста, теорема уже доказана, и здесь приходится, таким образом, оперировать над чрезвычайно большими числами. Что должен думать о трудности получить эту премию математик, знакомый с усилиями Куммера и его последователей, это ясно из изложенного мною выше; но большая публика другого мнения об этом предмете. В конце лета этого года известие о премии было распространено газетами (которые, впрочем, не были к тому уполномочены); с этого времени у нас накопился уже целый склад доказательств. Люди всех профессий — инженеры, народные учителя, священники, банкиры, дамы и т. д. — являются авторами этих работ. Общее во всех этих работах лишь то, что их авторы не имеют ни малейшего представления о серьезном математическом значении проблемы; они не делают даже ни малейшей попытки осведомиться в литературе вопроса и всегда стараются справиться с задачей какой-либо необычайной идеей и, конечно, неизменно попадают впросак. О тех несообразностях, которые появляются в этого рода произведениях, можно прочесть в критических отзывах о подобных доказательствах, которые помещены в большом количестве в журнале „Archiv für Mathem. und Physik", томы XIV, XV, XVI, XVII и XVIII (1901—1911 гг.). Не могу отказать себе в том, чтобы привести особенно разительный пример из этого вороха нелепостей. Человек, не знающий значения знака $>$, вместо

$$x^n + y^n = z^n \quad (n > 2)$$

читает:

$$x^n + y^n = z^n \quad (n + 2)$$

и, конечно, уже при $n = 1$ находит решение уравнения:

$$x + y = z \cdot 3.$$

Это открытие он шлет Гёттингенскому ученому обществу и считает математиков такими глупцами, которые способны за это дать такую премию. Но и серьезная математическая мысль получила благодаря всему этому новый

толчок к тому, чтобы заняться теоремой Ферма; действительно, здесь можно уже отметить некоторые успехи, хотя самое решение проблемы все еще остается очень далеким. Так, Виферих [1]) нашел очень простой признак (критерий), состоящий в том, что уравнение Ферма

$$x^p + y^p = z^p$$

при нечетном простом показателе p только в том случае может быть разрешимо в простых относительно p целых числах, если $2^p - 1$ делится на p^2. Более краткие доказательства и обобщения этой теоремы дали Фробениус [2]) и Д. Мириманов [3]). С другой стороны, следует еще назвать заметки Ф. Бернштейна [4]), Гекке [5]) и Фуртвенглера [6]), которые исходят из теории алгебраических числовых корпусов.

Теперь обратимся к восьмому из перечисленных выше пунктов, именно: к задаче о делении окружности на равные части. Я буду при этом принимать, что действия над комплексными числами вида $x + yi$ и изображение их на так называемой „комплексной плоскости" всем вам уже известны. Итак, задача заключается в том, чтобы разделить окружность на n равных частей или построить правильный n-угольник. Мы возьмем окружность, описанную радиусом, равным единице, из нулевой точки комплексной плоскости и примем точку $x + yi = 1$ за первую из n точек деления; тогда комплексные числа, соответствующие остальным вершинам, имеют вид (фиг. 17):

$$z = x + yi = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} = e^{\frac{2k\pi}{n}i} \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

---

[1]) A. Wieferich, „Journal für Mathematik", 15 Nov., 1909.

[2]) G. Frobenius, „Sitzungsberichte der Kaiserlichen Preussischen Akademie", Berlin, 2 Dez. 1909 und 24 Febr. 1910, а также „Journal für Mathematik", 137 (1910), S. 314.

[3]) D. Mirimanoff, „L'Enseignement Mathématique", 15 Nov. 1909. Comptes Rendus de l'Academie des Sciences", Paris, 24 Jan., „Journal für Mathematik", 139 (1911), S. 309.

[4]) F. Bernstein, „Nachrichten der Kaiserlichen Gesellschaft der Wissenschaften" Göttingen, math.—phys. Kl., 1910, S. 482. und S. 507.

[5]) E. Hecke, там же, 1910, S. 240.

[6]) Ph. Furtwängler, там же, 1910, S. 554.

Они удовлетворяют поэтому уравнению:

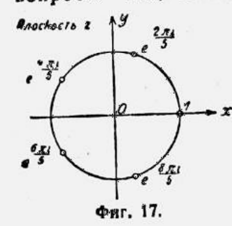
$$z^n = 1,$$

и задача о делении окружности на равные части сводится к решению этого простейшего алгебраического уравнения. Так как это уравнение постоянно имеет рациональный корень $z = 1$, то двучлен $z^n - 1$ делится на $z - 1$, и потому мы для остальных корней получаем уравнение:

$$z^{n-1} + z^{n-2} + z^{n-3} + \ldots + z^2 + z + 1 = 0.$$

Это есть уравнение $(n-1)$-й степени, в котором все коэфициенты равняются единице.

Уже в глубокой древности вызывал большой интерес вопрос о том, какие правильные многоугольники можно построить циркулем и линейкой. В древности было уже известно, что при $n = 2^h$, 3, 5 (где h есть произвольное целое число), а также для составных значений: $n = 2^h \cdot 3$, $n = 2^h \cdot 5$, $n = 2^h \cdot 3 \cdot 5$, эта задача решается; на этом пункте вопрос остановился вплоть до конца XVIII столетия, когда им занялся молодой Гаусс. Он нашел, что для всех простых значений n, имеющих вид:



Фиг. 17.

$$n = 2^{(2^\mu)} + 1,$$

возможно деление окружности на равные части циркулем и линейкой; при других же значениях оно невозможно. И действительно, первые значения $\mu = 0, 1, 2, 3, 4$ дают в этой формуле простые числа: 3, 5, 17, 257, 65537. Из них первые два случая были уже хорошо известны раньше, а остальные являются новыми. Особенно знаменит правильный семнадцатиугольник, построяемость которого посредством циркуля и линейки была в этом сочинении в первый раз обнаружена. Впрочем, общий вопрос о том, при каких значениях показателя μ предыдущая формула дает простые числа, остается и по сей день нерешенным. Я и здесь не буду останавливаться на деталях, а предпочту изложить

в общих чертах ход и значение этого открытия; подробности же относительно правильного семнадцатиугольника вы найдете в книге Вебера-Вельштейна.

По этому поводу я считаю необходимым особенно обратить ваше внимание на „Дневник“ Гаусса, опубликованный в 57 томе журнала „Mathematische Annalen“ (1903) и в томе X, 1 полного собрания сочинений Гаусса (1917). Это небольшая, невзрачная тетрадка, которую Гаусс начал вести с 1796 г., незадолго перед тем, как ему исполнилось 19 лет. Как раз первая запись относится к вопросу о возможности построения правильного семнадцатиугольника. Сделав так рано это важное открытие, Гаусс принял окончательное решение посвятить себя математике. Всякому математику будет очень интересно просмотреть этот дневник, так как здесь можно проследить и за дальнейшими выдающимися работами Гаусса, относящимися к теории чисел, к теории эллиптических функций и т. д.

В первый раз это первое крупное открытие Гаусса было опубликовано в виде краткого сообщения в „Jenaer Literaturzeitung“ от 1 июня 1796 г. Это было сделано по почину учителя и покровителя Гаусса, Циммермана из Брауншвейга, который поместил также и от себя короткую заметку об этой статье [1]). Доказательство Гаусс дал в своем основном сочинении по теории чисел: „Disquisitiones arithmeticae“, опубликованном в 1801 г.

Здесь мы находим также и вторую, отрицательную часть предложения, которой в упомянутой заметке не было, именно, что для других простых чисел, которые не могут быть приведены к виду $2^{(2^\mu)} + 1$, деление окружности на равные части не может быть произведено циркулем и линейкой. Я хочу рассмотреть здесь один частный случай этого важного доказательства невозможности, тем более, что в большой математической публике имеют очень мало представления о доказательствах невозможности вообще. Современной математике удалось при помощи такого рода доказательств невозможности исчерпать целый ряд знаменитых проблем, над которыми с древних времен тщетно

---

[1]) Эта заметка также перепечатана в 57 томе „Mathematische Annalen“, стр. 6, 1903, а также в томе X, 1 полного собрания сочинений Гаусса (1917)

трудились многие выдающиеся математики. Достаточно указать на задачи: о построении правильного семиугольника, о трисекции угла и квадратуре круга. При всем том имеется много людей, которые и по сей день занимаются этими задачами, не только не имея никакого представления о высшей математике, но и не зная даже постановки вопроса о доказательстве невозможности; сообразно своим познаниям, ограничивающимся обыкновенно элементарной геометрией, они обыкновенно пытаются преодолеть затруднения вспомогательными прямыми и окружностями и, в конце концов, нагромождают их в таком количестве, что никто не в состоянии разобраться в получающейся путанице и непосредственно показать автору его ошибку. Вы напрасно будете ссылаться на существующее доказательство невозможности, так как на этих людей в лучшем случае можно повлиять только прямым указанием допущенной ими ошибки. Каждый сколько-нибудь известный математик каждый год получает целую уйму такого рода посланий; и вы будете получать такие доказательства в большом количестве, когда будете стоять у дела. Очень хорошо, чтобы вы вперед были готовы к этим переживаниям и знали, как себя в этом отношении держать. Я полагаю поэтому, что вам будет полезно ознакомиться с одним из таких доказательств невозможности в простейшей форме.

Вот я и хочу изложить вам теперь подробное доказательство того, что правильный семиугольник не может быть построен циркулем и линейкой. Известно, что каждое построение, производимое циркулем и линейкой, при переходе к вычислению эквивалентно целому ряду последовательных извлечений квадратного корня и что, обратно, каждое такое квадрато-радикальное выражение может быть осуществимо геометрически пересечением прямых и окружностей. Это вы и сами себе легко уясните. Поэтому наше утверждение мы можем аналитически формулировать так, что *уравнение шестой степени*:

$$z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0,$$

характерное для правильного семиугольника, не может быть разрешено при помощи конечного числа квадратных корней. Но это

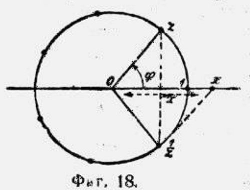
так называемое возвратное уравнение, которое одновременно с каждым корнем z имеет еще корень $\frac{1}{z}$. Это и будет тотчас видно, если мы напишем уравнение в таком виде:

$$z^3 + z^2 + z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} = 0. \qquad (1)$$

Степень такого уравнения может быть сразу понижена вдвое, если положить $z + z^{-1} = x$ и принять x за новое неизвестное. Простое вычисление дает для x кубическое уравнение:

$$x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0, \qquad (2)$$

и мы видим непосредственно, что уравнения (1) и (2) одновременно либо разрешаются в квадратных радикалах, либо не разрешаются. Впрочем, величину x можно привести в непосредственную геометрическую связь с построением правильного семиугольника. Из фиг. 18, изображающей в комплексной плоскости окружность радиуса, равного единице, легко усмотреть следующее: если мы обозначим через $\varphi = \frac{2\pi}{7}$ центральный угол правильного семиугольника и примем во внимание, что $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$ и $z^{-1} = \cos\varphi - i\sin\varphi$ суть две вершины, смежные с вершиной $z = 1$, то окажется, что $x = 2\cos\varphi$; поэтому по данному значению x легко построить семиугольник.



Фиг. 18.

Нам остается обнаружить, что *кубическое уравнение (2) не разрешается в квадратных радикалах*. Это доказательство распадается на арифметическую и алгебраическую части; мы начнем с первой части, которая, естественно, примыкает к тем вопросам теории чисел, которыми мы здесь занимаемся. Мы обнаружим прежде всего, что кубическое уравнение (2) неприводимо, т. е. что его левая часть не может быть разбита на двух множителей с рациональными коэфициентами. Заметим прежде всего, что полином третьей степени, если он раз-

лагается на множителей, необходимо имеет линейного множителя, и потому разложение должно иметь вид:

$$x^3 + x^2 - 2x - 1 = (x^2 + \beta x + \gamma)\ (x + \alpha); \qquad (3)$$

нам нужно поэтому доказать, что такое разложение не может иметь места.

Если бы такое разложение имело место, то уравнение (2) необходимо имело бы рациональный корень — α. Положим — $\alpha = \frac{p}{q}$, где p и q — целые взаимно-простые числа. Если бы это число удовлетворяло уравнению (2), то имело бы место равенство:

$$p^3 + p^2q - 2pq^2 - q^3 = 0.$$

Но в таком случае число p^3 делилось бы на $q:a$; так как p и q — числа взаимно простые, то и самое число p делилось бы на q. Но совершенно так же можно показать, что q^3, а следовательно и q, делится на p. Итак, p и q должны были бы быть целыми, взаимно простыми числами, которые, однако, делятся друг на друга. Ясно, что это возможно только в том случае, когда $p = \pm q = \pm 1$. Иными словами, уравнение (2) должно было бы при этих условиях иметь корень, равный ± 1. Но непосредственное вычисление обнаруживает, что это места не имеет. Сделанное допущение, таким образом, неправильно, т. е. разложение (3) не имеет места.

Вторая часть доказательства должна теперь заключаться в том, чтобы обнаружить, что неприводимое кубическое уравнение с рациональными коэфициентами не может быть разрешено при помощи квадратных радикалов. Эта часть доказательства имеет существенно алгебраический характер; однако для цельности изложения мы приведем его здесь. Мы дадим нашему предложению несколько иное и именно положительное выражение. Если уравнение третьей степени с рациональными коэфициентами

$$f(x) \equiv x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0 \qquad (4)$$

решается в квадратных радикалах, то оно необходимо имеет рациональный корень, а потому будет приводимым; в самом деле, существование рационального корня α равносильно тому, что функция $f(x)$ имеет рациональный множитель $x - \alpha$.

Этому доказательству необходимо предпослать классификацию всех выражений, составленных из квадратных радикалов, — вернее сказать: всех выражений, составленных из конечного числа квадратных корней и рациональных чисел при помощи рациональных операций; например:

$$\alpha = \frac{\sqrt{a + \sqrt{b} + \sqrt{c}}}{\sqrt{d + \sqrt{e} + \sqrt{f}}},$$

где $a, b, \ldots, f$ суть рациональные числа, есть такого рода выражение. Мы здесь, естественно, имеем в виду только такие радикалы, в которых нельзя произвести точного извлечения корня. Эта классификация составляет важнейший пункт всего рассуждения.

Каждое выражение такого рода представляет собой рациональную функцию некоторого числа квадратных радикалов, в нашем примере трех. Мы обратимся прежде всего к одному из этих радикалов, который может иметь, впрочем, сколь угодно сложное строение. Под порядком такого радикала мы будем разуметь число входящих в его состав и стоящих один внутри другого радикалов. Таким образом в предыдущем выражении знаменателем служит радикал 3-го порядка, в числителе же первый радикал имеет порядок 2, второй — порядок 1.

В произвольном квадрато-радикальном выражении (т. е. в выражении, составленном из квадратных радикалов) мы по этому правилу устанавливаем числа, выражающие порядок отдельных „простых квадрато-радикальных выражений“, из которых уже составляется рационально все наше выражение и которые не сводятся к радикалам низшего порядка; наибольшее из этих чисел μ принимается за порядок всего выражения. В нашем примере $\mu = 3$. Однако в состав нашего выражения может входить несколько „простых квадрато-радикальных выражений“ порядка μ; число их n, так называемое „число членов“ радикального выражения, мы примем за второе характерное число нашего выражения. При этом предполагается, что

ни одно из этих n простых выражений μ-го порядка не выражается через остальные с помощью выражений низшего порядка [1]). Так, например, в выражении первого порядка

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$$

число радикальных членов есть 2, а не 3, потому что $\sqrt{6}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$. В приведенном выше выражении α 3-го порядка число членов равно 1.

Таким образом каждому квадрато-радикальному выражению мы отнесли два конечных числа μ и n, которые мы в виде символа (μ, n) будем называть характеристикой или рангом выражения. Из двух квадрато-радикальных выражений различного порядка мы припишем низший ранг тому, которое имеет низший порядок; из двух же выражений одинакового порядка мы припишем низший ранг тому, которое имеет меньше членов. Таким образом выражениями самого низшего ранга являются те, которым соответствует порядок 0, т. е. рациональные числа.

Предположим теперь, что корень x_1 кубического уравнения (4) может быть выражен через квадратные радикалы и именно может быть представлен выражением ранга (μ, n). Выделяя один из n членов μ-го порядка $\sqrt{R}$, мы можем написать этот корень в виде:

$$x_1=\frac{\alpha+\beta\sqrt{R}}{\gamma+\delta\sqrt{R}},$$

где каждое из выражений α, β, γ, δ содержит уже не более $n-1$ членов μ-го порядка, а R есть выражение $(\mu-1)$-го порядка. С другой стороны, выражение $\gamma-\delta\sqrt{R}$ во всяком случае, отлично от нуля, иначе радикал $\sqrt{R}$ был бы равен γ/δ, т. е. выражался бы рационально через остальные $(n-1)$ членов μ-го порядка, фигурирующие в выражении x_1, а потому был бы лишним радикалом, от него можно было бы освободиться. Мы можем поэтому помножить числитель и знаменатель дроби x_1 на $\gamma-\delta\sqrt{R}$, и тогда получим:

$$x_1=\frac{(\alpha+\beta\sqrt{R})(\gamma-\delta\sqrt{R})}{\gamma^2-\delta^2 R}=P+Q\sqrt{R},$$

[1]) То-есть не выражается через остальные радикалы μ-го порядка с коэфициентами низшего порядка.

где P и Q суть рациональные функции от α, β, γ, δ и R, а поэтому содержат не более $n-1$ членов μ-го порядка или же содержат только члены более низкого порядка; эти выражения имеют поэтому ранг не выше $(\mu, n-1)$. Если мы вставим это выражение в уравнение (4), то получим:

$$f(x_1)\equiv(P+Q\sqrt{R})^3+A\,(P+Q\sqrt{R})^2+$$
$$+B\,(P+Q\sqrt{R})+C=0.$$

Выполнив все возвышения в степень, мы приведем это сотношение к виду:

$$f(x_1)=M+N\sqrt{R}=0,$$

где M, N суть полиномы, зависящие от P, Q, R, т. е. рациональные функции от α, β, γ, δ, R. Если бы N было отлично от нуля, то мы получили бы $\sqrt{R}=-\frac{M}{N}$, т. е. этот радикал выражался бы рационально через α, β, γ, δ и R, т. е. максимум через $(n-1)$ членов μ-го порядка и через члены $(\mu-1)$-го порядка; но это, как мы уже указали выше, места иметь не может. Отсюда следует, что необходимо $N=0$, а потому и $M=0$. Отсюда мы заключаем, далее, что и

$$x_2=P-Q\sqrt{R}$$

есть корень нашего кубического уравнения; в самом деле, совершенно ясно, что

$$f(x_2)=M-N\sqrt{R}=0.$$

Но теперь доказательство быстро и очень любопытно заканчивается. Если x_3 есть третий корень уравнения, то, как известно,

$$x_1+x_2+x_3=-A,$$

$$x_3=-A-(x_1+x_2)=-A-2P.$$

Это выражение имеет тот же ранг, что и P, т. е. низший, чем x_1. Если x_3 есть уже рациональное число, то наша

теорема доказана. В противном случае мы можем сделать этот корень точкой отправления того же рода рассуждений; тогда окажется, что более высокий ранг двух первых корней мог представлять собой только иллюзию, так как один из них, во всяком случае, должен иметь еще низший ранг, нежели x_3. Продолжая это рассуждение, мы все переходим от одного корня к другому и всякий раз убеждаемся, что корень должен быть ступенью ниже. Вследствие этого мы, в конце концов, необходимо должны притти к корню порядка $\mu = 0$, т. е. мы приходим к заключению, что наше уравнение третьей степени действительно имеет рациональный корень. Тогда мы уже не имеем возможности вести то же рассуждение дальше; два других корня в этом случае либо также должны быть рациональными, либо должны иметь вид: $P \pm Q\sqrt{R}$, где P, Q и R суть рациональные числа. Но этим доказано, что функция $f(x)$ распадается на множителей, из которых один — первой, а другой — второй степени; это функция приводимая. Итак, никакое неприводимое уравнение третьей степени, в частности наше уравнение правильного семиугольника, не решается в квадратных радикалах. Этим доказано вместе с тем, что правильный семиугольник не может быть построен циркулем и линейкой.

Вы видите, как просто и наглядно проводится это доказательство и как мало познаний оно, собственно, предполагает. Некоторые части доказательства, особенно рассуждения относительно классификации радикальных выражений, требуют довольно серьезной математической абстракции. Я не берусь поэтому судить, можно ли это доказательство считать доказательством достаточно простым, чтобы убедить профанов, о которых шла речь выше, в тщетности их попыток найти элементарное решение задачи. Все же, мне кажется, следует всякий раз делать попытку медленно и подробно выяснить им доказательство.

В заключение я хочу еще привести некоторую литературу, относящуюся частью к вопросу о правильных многоугольниках, частью же к вопросу о выполнимости геометрических построений вообще. В первую очередь

приходится указать опять на „Энциклопедию элементарной математики“ Вебера и Вельштейна, т. I (гл. XVIII и XX), а затем на небольшой сборник „Лекции по избранным вопросам элементарной геометрии“ [1]), который я выпустил в 1895 г. по поводу съезда старших преподавателей в Гёттингене. Книжка эта, однако, уже вышла из продажи. Вместо нее могу указать недавно выпущенный в Болонье Энрикесом сборник под общим заглавием „Вопросы элементарной геометрии“ [2]), который ориентирует вас в этих вопросах.

Этим я заканчиваю обзор вопросов, относящихся к теории чисел, оставляя последний из них, — доказательство трансцендентности чисел — к концу лекций.

Мне остается рассмотреть последнюю ступень в деле расширения понятия о числе.

IV. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА.

1. Обыкновенные комплексные числа.

Позвольте мне предпослать несколько исторических указаний о развитии этих чисел. Впервые мнимые числа появляются в 1545 г. у Кардано (Cardano), но и то случайно, при решении кубического уравнения. Относительно их дальнейшего развития можно повторить замечание, сделанное нами по поводу отрицательных чисел: помимо и даже против воли того или другого математика, мнимые числа снова и снова появляются при выкладках, и лишь постепенно, по мере того как обнаруживается польза от их употребления, они получают все более и более широкое распространение.

Конечно, математики делали это не с легким сердцем; мнимые числа долго сохраняли несколько мистиче-

---

[1]) F. Klein, Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie, ausgearbeitet von F. Tägert. Leipzig 1895. Имеется русский перевод под указанным в тексте заглавием, изданный Казанским физико-математическим обществом в 1898 г.

[2]) F. Enriques, Questioni riguardanti la geometria elementare, Bologna 1907. Немецкий перевод выпущен Тейбнером под заглавием „Fragen der Elementargeometrie“. Есть русский перевод изд. «Физика» 1913 г.

скую окраску, какую они и теперь еще имеют в глазах ученика, который впервые слышит об этом удивительном $i = \sqrt{-1}$. Для подтверждения я хочу привести вам одну крайне характерную фразу Лейбница, относящуюся к 1702 г.; вот она: „Мнимые числа — это прекрасное и чудесное убежище божественного духа, почти что сочетание (amphibium) бытия с небытием“. В XVIII в. логическая сторона вопроса еще нисколько не выясняется; но благодаря Эйлеру устанавливается основное значение мнимых чисел в теории функций: в 1748 г. Эйлер нашел удивительное соотношение:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

вскрывающее внутреннюю связь тех видов функциональной зависимости, которые встречаются в элементарном анализе. Лишь XIX в. принес с собой логически ясное понимание сущности комплексных чисел. Здесь прежде всего надо указать на геометрическую интерпретацию, к которой почти одновременно пришли многие исследователи на рубеже двух столетий. Достаточно будет указать на того, кто, несомненно, наиболее глубоко проник в сущность вопроса и дольше всех оказывал влияние на ученый мир, на нашего Гаусса; уже в 1797 г., как видно из упомянутого выше его дневника, он вполне владел этой интерпретацией, но он опубликовал ее лишь гораздо позже. Вторым завоеванием XIX в. является создание чисто формального обоснования комплексных чисел, которое сводит это учение к теории вещественных чисел; им мы обязаны английским математикам 30-х годов, о чем вы найдете более подробные сведения в цитированной уже книге Ганкеля (стр. 66).

Остановимся подробнее на этих двух способах обоснования теории мнимых чисел, господствующих по настоящее время. Станем сперва на чисто формальную точку зрения, согласно которой правильность образования новых понятий обусловливается не значением самих объектов, а отсутствием внутреннего противоречия в правилах действий. С этой точки зрения введение комплексных чисел представляется

в следующем виде, свободном от всяких следов чего-либо таинственного:

1. Комплексное число $x + iy$ есть соединение двух вещественных чисел x, y в одну числовую пару, относительно которой принимаются следующие положения:

2. Два комплексных числа $x + iy$, $x' + iy'$ считаются равными в том и только в том случае, если $x = x'$, $y = y'$.

3. Сложение и вычитание определяются так:

$$(x + iy) \pm (x' + iy') = (x \pm x') + i\,(y \pm y').$$

Легко видеть, что при этих условиях остаются в силе все правила сложения, кроме закона монотонности, который не может быть сохранен в старой формулировке, так как комплексные числа, по самой своей природе, не допускают того расположения в ряд по их величине, которое свойственно натуральным и вообще вещественным числам. Ради краткости я не вхожу в рассмотрение той измененной формы, которую приходится поэтому дать закону монотонности.

4. Что касается умножения, то мы устанавливаем, что выкладки производятся так же, как с обыкновенными буквами, но только при этом мы всегда принимаем $i^2 = -1$, так что, например,

$$(x + iy)\,(x' + iy') = (xx' - yy') + i\,(xy' + x'y).$$

В результате имеют место, как нетрудно видеть, все законы умножения кроме закона монотонности.

5. Деление определяется как действие, обратное умножению; в частности

$$\frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2},$$

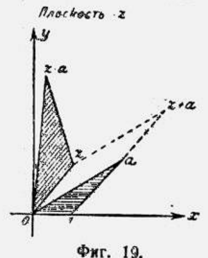
в чем легко убедиться перемножением.

Это действие выполнимо всегда, кроме случая $= y = 0$, т. е. сохраняется невозможность деления на нуль.

Из всего этого следует, что вычисления с комплексными числами не могут привести к про-

тиворечиям, так как мы свели эти вычисления целиком к вещественным числам и к известным действиям над ними, а эти последние мы здесь будем считать свободными от противоречий.

После этих чисто формальных рассуждений, естественно, возникает вопрос, не возможно ли такое геометрическое или какое-нибудь другое наглядное толкование комплексных чисел и операций над ними, которое давало бы в то же время наглядное обоснование отсутствия в них внутренних противоречий.



Фиг. 19.

Всем вам известно, — к тому же мне уже приходилось упоминать об этом, — каким образом совокупность точек x, y плоскости в системе координат x, y рассматривают, как изображение совокупности комплексных чисел $x+iy$. Сумма двух чисел $z+a$ получается тогда посредством известного построения параллелограма по соответствующим этим числам точкам и по началу координат O (фиг. 19), между тем как произведение $z \cdot a$ получается при помощи точки-единицы 1 ($x=1$, $y=0$) посредством построения треугольника, подобного треугольнику $aO1$. Другими словами, сложение $z'=z+a$ изображается параллельным перенесением плоскости в себе самой, умножение $z'=z \cdot a$ — подобным преобразованием, т. е. вращением и растяжением при неподвижном начале O. Расположение на плоскости точек, соответствующих числам, сразу показывает, чем следует заменить здесь правила монотонности вещественных чисел. Этих указаний вполне достаточно, чтобы напомнить вам постановку вопроса.

Я хочу воспользоваться здесь случаем, чтобы указать вам на то место у Гаусса, где это обоснование комплексных чисел посредством геометрической интерпретации их высказано вполне отчетливо, благодаря чему оно впервые получило всеобщее признание. В одной работе 1831 г. Гаусс занимается теорией целых комплексных

чисел $a+ib$, где a и b суть целые вещественные числа, и распространяет на них теоремы обыкновенной теории чисел относительно простых множителей, квадратичных и биквадратичных вычетов и т. д. О подобных обобщениях теории чисел мы уже упоминали по поводу великой теоремы Ферма.

В собственном сообщении[1] об этой работе Гаусс говорит о том, что он называет „истинной метафизикой мнимых чисел". Здесь он основывает оправдание действий с комплексными числами исключительно на том обстоятельстве, что этим числам и действиям над ними можно дать указанное выше наглядное геометрическое толкование; таким образом Гаусс нисколько не становится на формальную точку зрения. Вообще же эти довольно длинные, весьма красиво написанные рассуждения Гаусса в высшей степени интересны и заслуживают того, чтобы вы их прочитали. Упомяну еще только о том, что в этой статье Гаусс предлагает вместо слова „мнимый" (imaginär) более ясное слово „комплексный", которое действительно вошло в употребление.

2. Высшие комплексные числа в особенности кватернионы.

У всякого, основательно занимавшегося комплексными числами, возникает вопрос, нельзя ли построить другие, высшие комплексные числа с большим числом новых единиц, а не с одним только i, и целесообразно определить действия над ними? К положительным результатам в этой области впервые пришли около 1840 г. независимо друг от друга Г. Грассман (H. Grassmann) в Штеттине и Гамильтон (W. R. Hamilton) в Дублине. С изобретением Гамильтона, так называемым исчислением кватернионов, я хочу познакомить вас несколько ближе. Но сперва я скажу несколько слов об общей постановке проблемы.

Обыкновенные комплексные числа $x+iy$ можно рассматривать как линейные комбинации вида:

$$x \cdot 1 + y \cdot i,$$

[1]) См. Werke, Bd. II (Göttingen 1876), стр. 175.

построенные из двух различных единиц 1 и i с помощью вещественных параметров x, y. Аналогично этому станем рассматривать сколько угодно — скажем n — различных между собою единиц $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и назовем системой высших комплексных чисел, построенной из этих единиц, совокупность комбинаций вида:

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n,$$

составленных с помощью n произвольных вещественных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Само собою разумеется, что два таких комплексных числа, например, x и $y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \ldots + y_n e_n$, мы будем считать равными тогда и только тогда, когда коэфициенты при отдельных единицах, так называемые составляющие комплексного числа, попарно равны между собой:

$$x_1 = y_1,\ x_2 = y_2, \ldots,\ x_n = y_n.$$

Столь же естественно и определение сложения и вычитания, которое попросту сводит эти операции к сложению и вычитанию составляющих:

$$x \pm y = (x_1 \pm y_1)\ e_1 + (x_2 \pm y_2)\ e_2 + \ldots + (x_n \pm y_n)\ e_n.$$

Труднее и интереснее обстоит дело с умножением. Здесь мы, конечно, начинаем с того, что поступаем по общим правилам буквенного исчисления, помножая каждый i-й член выражения x на каждый k-й член выражения y $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$:

$$x \cdot y = \sum_{(i,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)} x_i y_k e_i e_k.$$

Но чтобы этот результат умножения также представлял собой некоторое число нашей системы, необходимо обладать правилом, которое изображало бы произведения $e_i \cdot e_k$ в виде комплексных чисел системы, т. е. в виде линейных комбинаций единиц; необходимо иметь, следовательно, n^2 равенств такого вида:

$$e_i e_k = c_{ik1} e_1 + c_{ik2} e_2 + \ldots + c_{ikn} e_n = \sum_{(l=1,\ 2,\ \ldots,\ n)} c_{ikl} \cdot e_l \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Тогда, действительно, произведение

$$x \cdot y = \sum_{(l=1,\ 2,\ \ldots,\ n)} \left(\sum_{(i,\ k=1,\ \ldots,\ n)} x_i y_k c_{ikl} \right) e_l$$

представит собою некоторое число нашей системы. В установлении этого правила умножения, т. е. схемы коэфициентов c_{ikl}, заключается характеристика каждой частной системы комплексных чисел.

Если определить деление как действие, обратное умножению, то оказывается, что определенное таким образом деление не всегда однозначно выполняется даже и в том случае, если делитель не обращается в нуль. В самом деле, определение y из уравнения $x \cdot y = z$ получается посредством решения n линейных уравнений:

$$\sum x_i y_k c_{ik1} = z_1, \quad \sum x_i y_k c_{ik2} = z_2, \ldots, \quad \sum x_i y_k c_{ikn} = z_n$$

$(i, k = 1, 2, 3, \ldots, n$ в каждом суммовании) с неизвестными $y_1, y_2, \ldots, y_n$; но эти уравнения в том случае, если их определитель обращается в нуль, либо вовсе не имеют решений, либо имеют их бесчисленное множество; в подобном случае все z_l могут равняться нулю, хотя и не все $y_k = 0$, т. е. произведение двух чисел может обращаться в нуль, хотя ни один сомножитель не равен нулю. Только с помощью специального искусного подбора коэфициентов c_{ikl} можно достичь здесь сохранения указанного свойства обыкновенных чисел; правда, более подробное изучение вопроса показывает, что при $n > 2$ сохранение этого свойства всегда покупается ценою уклонения от одного из других правил действий; поэтому стараются распорядиться так, чтобы этим уклоняющимся свойством оказалось такое, которое наименее важно для соотношений, составляющих цель исследования.

Все эти общие рассуждения мы теперь проследим на кватернионах, которые ввиду их применений в физике и механике представляют, несомненно, самую важную систему высших комплексных чисел. Как видно из их названия, это — четырехчленные числа $(n = 4)$. В частном

случае они вырождаются в трехчленные векторы; последние стали теперь общеизвестными, и о них, вероятно, при случае упоминают и в школе.

За первую из четырех единиц, из которых составляются кватернионы, как и в случае обыкновенных комплексных чисел, принимают обыкновенную вещественную единицу 1. Три другие единицы обыкновенно обозначают по Гамильтону через i, j, k, так что общий вид кватерниона получается такой:

$$q = d + ia + jb + kc,$$

где a, b, c, d изображают вещественные параметры или коэфициенты кватерниона. Первую составляющую d, на которую умножается 1 и которая соответствует вещественной части обыкновенного комплексного числа, называют скалярной составной частью кватерниона, совокупность же трех остальных членов $ai + bj + ck$ называют его векториальной составной частью.

Фиг. 20.

Относительно сложения вряд ли можно что-либо прибавить к предыдущим общим соображениям; поэтому я дам вам сразу же естественное геометрическое толкование его, основанное на известной вам интерпретации векторов. А именно, представим себе отрезок, соответствующий векториальной части кватерниона q и имеющий проекции a, b, c на оси координат; этому вектору припишем вес, равный скалярной части d. После этого сложение векторов q и $q' = d' + ia' + jb' + kc'$ сводится к следующему: мы строим равнодействующую обоих отрезков по известному правилу параллелограма для сложения векторов (фиг. 20) и приписываем ей в качестве веса сумму весов обоих слагаемых; этим путем мы действительно получаем отрезок, представляющий собой кватернион:

$$q + q' = (d + d') + i\ (a + a') + j\ (b + b') + k\ (c + c').$$

Со специальными свойствами кватернионов мы встречаемся впервые, когда переходим к умножению; именно, они заключаются, как мы видели это в общей теории,

в том, как устанавливаются значения произведений единиц. Я покажу вам прежде всего, каким кватернионам Гамильтон приравнивает 16 произведений основных единиц по 2. Первое условие состоит в том, чтобы с первой единицей 1, как это показывает самое ее обозначение, производить вычисления как с вещественным числом 1; следовательно:

$$1^2 = 1, \quad i \cdot 1 = 1 \cdot i = i, \quad j \cdot 1 = 1 \cdot j = j, \quad k \cdot 1 = 1 \cdot k = k.$$

Но существенно новыми являются условия относительно квадратов трех других единиц:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

и относительно их произведений по две:

$$j \cdot k = +i, \quad k \cdot i = +j, \quad i \cdot j = +k,$$

между тем как при обратном порядке сомножителей полагаем:

$$k \cdot j = -i, \quad i \cdot k = -j, \quad j \cdot i = -k.$$

При этом сразу бросается в глаза, что переместительный закон при умножении, вообще говоря, не имеет места; с этим неудобством приходится примириться, чтобы спасти однозначность деления и ту теорему, по которой произведение двух чисел только в том случае может обратиться в нуль, если один из сомножителей становится равным нулю. Мы сейчас увидим, что этот и все другие законы сложения и умножения, за единственным указанным исключением, действительно остаются в силе, и что, следовательно, сделанные выше простые условия являются в высшей степени целесообразными.

Начнем с того, что составим произведение двух кватернионов в общем виде:

$$q' = p \cdot q = (d + ia + jb + kc) \cdot (w + ix + jy + kz),$$

принимая во внимание данную последовательность сомножителей. Перемножая почленно, заменяя произведения единиц их значениями из нашей таблицы умножений и

соединяя затем члены с одинаковыми единицами в один, находим:

$$\left.\begin{aligned} q' = pq = w' + ix' + jy' + kz' = (dw - ax - by - cz) & \\ + i(aw + dx + \underline{bz - cy}) & \\ + j(bw + dy + \underline{cx - az}) & \\ + k(cw + dz + \underline{ay - bx}) & \end{aligned}\right\}$$

Таким образом составляющие кватерниона-произведения представляют собой определенные простые билинейные [1]) комбинации составляющих обоих сомножителей. При перемене порядка сомножителей шесть подчеркнутых членов меняют свои знаки, так что $q \cdot p$, вообще говоря, существенно отлично от $p \cdot q$ и притом не только по знаку, как это имеет место для произведений отдельных единиц.

В то время как переместительность, как мы видим, не имеет места, законы распределительности и сочетательности остаются в силе. Действительно, если вычислить, с одной стороны, произведение $p(q + q_1)$, а, с другой, выражение $pq + pq_1$, формально перемножая члены, и не заменять произведений единиц их значениями, то должны получиться тождественные выражения; но это тождество не нарушится, если затем к тому и другому выражению применить таблицу умножения единиц. Далее, нетрудно видеть, что и закон сочетательности должен остаться всегда в силе, если только он действителен для умножения единиц. А этот последний факт можно установить непосредственно, на основании таблицы умножения, как я покажу на таком примере:

$$(ij)k = i(jk).$$

В самом деле,

$$(ij)k = k \cdot k = -1$$

и

$$i(jk) = i \cdot i = -1.$$

---

[1]) То есть выражения, составленные из двух систем величин a, b, c, d и x, y, z, w так, что в каждый член входит линейно один множитель из первой системы и один—из второй. Под „составляющими" кватерниона автор разумеет коэфициенты при различных единицах. *Ред.*

Перейдем к делению. Достаточно показать, что **всякому кватерниону** $p = d + i \cdot a + j \cdot b + k \cdot c$ **отвечает вполне определенный другой кватернион** q **такой, что**

$$p \cdot q = 1;$$

представляется целесообразным обозначить это q через $1/p$. Деление в общем случае легко сводится к этому частному случаю. Чтобы определить это q, полагаем предыдущее выражение для $p \cdot q$ равным 1, т. е. $1 = 1 + 0 \cdot i + + 0 \cdot j + 0 \cdot k$; приравнивая составляющие, получаем следующие четыре уравнения для четырех неизвестных составляющих x, y, z, w кватерниона q:

$$\begin{aligned} dw - ax - by - cz &= 1, \\ aw + dx - cy + bz &= 0, \\ bw + cx + dy - az &= 0, \\ cw - bx + ay + dz &= 0. \end{aligned}$$

Разрешимость подобной системы уравнений зависит, как известно, от ее определителя; в данном же случае мы имеем как раз так называемый косой симметричный определитель, т. е. такой, в котором элементы, лежащие симметрично по отношению к главной диагонали (идущей от верхнего элемента слева к нижнему элементу справа), отличаются друг от друга только знаками, между тем как все элементы главной диагонали равны между собой. Теория определителей дает очень простую формулу для вычисления такого рода определителя, а именно, в данном случае оказывается:

$$\begin{vmatrix} d & -a & -b & -c \\ a & d & -c & b \\ b & c & d & -a \\ c & -b & a & d \end{vmatrix} = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2;$$

в справедливости этого равенства можно легко убедиться и непосредственным вычислением. В том обстоятельстве, что этот определитель оказывается равным как раз некоторой степени суммы квадратов четырех составляющих, и заключается собственно тонкий и глубокий смысл

условий Гамильтона; именно из этого обстоятельства вытекает, что определитель всегда отличен от нуля, кроме того случая, когда одновременно $a = b = c = d = 0$; поэтому, за исключением одного только этого случая ($p = 0$), уравнения однозначно разрешаются, и обратный кватернион q оказывается, таким образом, однозначно определенным.

Если положить

$$T = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2},$$

(эту величину, играющую большую роль в теории кватернионов, называют „тензором кватерниона p"), то легко убедиться прямой подстановкой, что это однозначное решение выражается так:

$$x = -\frac{a}{T^2}, \quad y = -\frac{b}{T^2}, \quad z = -\frac{c}{T^2}, \quad w = \frac{d}{T^2},$$

так что окончательный результат получается такой:

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{d + ia + jb + kc} = \frac{d - ia - jb - kc}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}.$$

Вводя, аналогично теории обыкновенных комплексных чисел, кватернион

$$\overline{p} = d - ia - jb - kc$$

под названием сопряженного с p, можно последнюю формулу написать еще и в таком виде:

$$\frac{1}{p} = \frac{\overline{p}}{T^2},$$

или

$$p \cdot \overline{p} = T^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2;$$

эти формулы являются непосредственными обобщениями известных свойств обыкновенных комплексных чисел. А так как и, обратно, p является сопряженным с $\overline{p}$ числом, то также:

$$\overline{p} \cdot p = T^2,$$

так что в этом частном случае имеет место переместительность сомножителей.

Теперь мы в состоянии сразу получить решение задачи деления в общем виде.

Если положим

$$pq = q'$$

и обе части этого равенства помножим слева на $\frac{1}{p}$, то получим:

$$\frac{1}{p} \cdot pq = \frac{1}{p} \cdot q' \text{ или } q = \frac{1}{p} q' = \frac{\overline{p}}{T^2} q',$$

так как

$$\frac{1}{p} \cdot pq = \left(\frac{1}{p} \cdot p\right) q = q.$$

Уравнение же $qp = q'$, отличающееся от первого только тем, что неизвестный сомножитель q занимает первое место, имеет, вообще говоря, отличное решение:

$$q = q' \cdot \frac{1}{p} = q' \cdot \frac{\overline{p}}{T^2}.$$

Является вопрос, нельзя ли найти такой геометрической интерпретации, при которой эти действия и их законы являются чем-то естественным.

Чтобы притти к такой интерпретации, начнем с частного случая, когда оба сомножителя сводятся к простым векторам, т. е. когда скалярные части $d = w = 0$. Тогда наша общая формула для произведения (стр. 94) принимает такой вид:

$$q' = p \cdot q = (ia + jb + kc) \cdot (ix + jy + kz) = -(ax + by + cz) + i\,(bz - cy) + j\,(cx - az) + k\,(ay - bx);$$

мы видим, что произведение двух кватернионов, сводящихся к одним только векторам, состоит из двух частей — скалярной и векториальной. Эти составные части нетрудно привести в связь с общепринятыми теперь видами произведений векторов. Эти понятия, гораздо более распространенные в Германии, чем кватернионы, ведут начало от Грассмана, хотя самое слово „вектор" английского происхождения. Те два вида произведений векторов, с которыми обыкновенно оперируют, носят теперь большей

частью названия **внутреннего или скалярного произведения** $ax + by + cz$, которое, таким образом, только знаком отличается от скалярной части написанного выше произведения кватернионов, и **внешнего или векториального произведения** $i\,(bz - cy) + j\,(cx - az) + k\,(ay - bx)$, которое равно векториальной части произведения кватернионов.

Построим оба вектора (a, b, c) и (x, y, z) в виде отрезков, исходя из начала координат O (фиг. 21); их концы будут находиться в точках (a, b, c) и (x, y, z); длины их равны $l = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ и $l' = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Если через φ обозначить угол между обоими отрезками, то по известным теоремам аналитической геометрии — в подробности я не вхожу — следует, что внутреннее произведение

$$ax + by + cz = l \cdot l' \cdot \cos\varphi.$$

Фиг. 21.

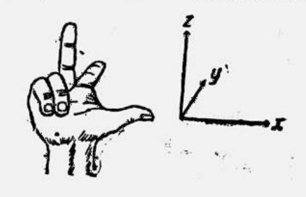
Внешнее произведение само представляет собой вектор, который, как не трудно видеть, направлен перпендикулярно плоскости l, l' [1]); его длина оказывается равной $l \cdot l' \cdot \sin\varphi$.

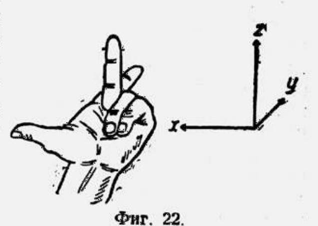
Существенным является вопрос о направлении вектора-произведения еще в том смысле, в какую сторону плоскости, определяемой векторами l и l', надо его откладывать. Это направление меняется в зависимости от принятой системы координат. А именно, существуют, как вам известно, две различные, неконгруентные, т. е. не могущие быть совмещенными, системы прямоугольных координат; при соответственно одинаковом направлении двух пар осей у них, например осей y-ов и z-ов, третьи оси—оси x-ов—имеют прямо противоположные направления. Такие две зеркально-симметричные системы находятся одна к другой в таком же отношении, как правая рука к левой; действительно, их можно различать, пользуясь следующим простым мнемоническим правилом: оси x, y, z одной системы расположены, как расставленные

[1]) Направляющие косинусы первого вектора пропорциональны коэфициентам a, b, c, а второго — коэфициентам x, y, z. Так как направляющие косинусы векториального произведения суть $bz - cy$, $cx - az$, $ay - bx$, то этот последний вектор перпендикулярен первым двум. *Ред.*

пальцы—большой, указательный и средний—правой руки, оси x, y, z другой системы—как те же пальцы левой руки (фиг. 22). В литературе постоянно встречается то одна, то другая система; в различных странах, в различных дисциплинах и, наконец, у различных авторов господствует различная система.

В простейшем случае, когда $p = i$, $q = j$, т. е. когда p и q равны отрезкам-единицам, отложенным вдоль осей x и y, их внешнее произведение, в силу условия $i \cdot j = k$, оказывается равным единичному вектору, лежащему на оси z-ов (фиг. 23). Но i и j можно, непрерывно изменяя, превратить в любые векторы p и q [1]); при этом k перейдет непрерывным образом в векториальную составную часть произведения $p \cdot q$, ни разу не обращаясь в течение этого процесса в нуль; поэтому первый и второй сомножители и само векториальное произведение всегда должны быть так расположены друг относительно друга, как оси x, y, z системы координат, т. е. должны представлять „правую“ или „левую“ систему направлений, смотря по тому, какая система принята для координатных осей.



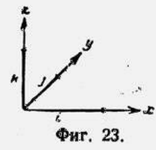


Фиг. 22.

Мне хочется прибавить несколько слов по поводу прискорбного вопроса о системе обозначений в век-

[1]) Откладывая на соответствующих осях векторы i и j, мы можем брать различные единицы для изображения этих векторов; вместе с тем будут меняться отрезки, изображающие векторы i, j. Непрерывно их меняя, мы можем сделать отрезки i, j равными p, q. Вместе с тем будет непрерывно меняться произведение pq, а так как оно в нуль не обратится, то оно будет все время направлено по положительной оси z-ов. Предложение может быть доказано и без этих искусственных соображений, но это значительно сложнее. *Ред.*

ториальном анализе. Дело в том, что для каждого действия с векторами употребляется большое количество различных знаков, и, к сожалению, до сих пор еще не удалось создать одну единственную общеобязательную систему обозначений. Четыре года назад на съезде естествоиспытателей в Касселе (1903) с этой целью была даже избрана особая комиссия; но члены ее не могли вполне столковаться, а так как каждый из них все же имел доброе желание сделать шаг от своей первоначальной точки зрения навстречу другим взглядам, то единственным результатом явилось возникновение трех новых обозначений! После этого и других аналогичных случаев я пришел к тому заключению, что действительное объединение всех заинтересованных в таких вещах кругов на почве одних и тех же словесных и письменных обозначений возможно только в тех случаях, когда к этому побуждают в высшей степени важные материальные интересы. Только под таким давлением могло произойти в 1881 г. в электротехнике всеобщее признание единообразной системы мер вольт-ампер-ом и последующее закрепление ее государственным законодательством, так как промышленность настойчиво требовала подобного единства мер как основы всех операций. За векториальным исчислением еще не стоят такие могущественные материальные стимулы, и поэтому приходится пока что — дурно ли, хорошо ли — примириться с тем, что каждый отдельный математик остается при привычном для него способе обозначений, который он считает наиболее удобным или даже — если он несколько склонен к догматизму — единственно правильным [1]).



Фиг. 23.

[1]) В СССР Комиссией по стандартизации в законодательном порядке установлен стандарт векторных обозначений. Этот стандарт, предварительно обсуждался в различных научных и технических учреждениях. Основные соображения, которыми руководилась Комиссия, заключались в том, чтобы законоположение отличалось возможной простотой и не расходилось с наиболее установившимися в литературе (особенно в технической) обозначениями. Наиболее авторитетным образцом при этом считалась Гёттингенская энциклопедия; однако стандарт не во всем соответствует обозначениям энциклопедии. *Ред.*

3. Умножение кватернионов и преобразование поворотного растяжения в пространстве.

Теперь перейдем к **геометрической интерпретации умножения кватернионов в общем виде**, предпослав ей следующее замечание.

Если в произведении $q' = \underline{p}\underline{q}$ заменить p и q их сопряженными значениями $\overline{p}$, $\overline{q}$, т. е. если изменить знаки при a, b, c, x, y, z на обратные, то в формуле произведения (стр. 94) скалярная часть останется без изменения, а в векториальной части только не подчеркнутые множители при i, j, k изменят свои знаки на обратные. Если же одновременно изменить и порядок производителей, то и подчеркнутые множители изменят знаки, так что $\overline{q}\cdot\overline{p}$ представляет как раз сопряженное значение $\overline{q'}$ по отношению к $q' = p\cdot q$.

Если $q' = p\cdot q$, то $\overline{q'} = \overline{q}\cdot\overline{p}$.

Перемножая оба равенства, находим:

$$q'\cdot\overline{q'} = p\cdot q\cdot\overline{q}\cdot\overline{p}.$$

При этом порядок множителей играет существенную роль; но мы в праве применить сочетательный закон и написать:

$$q'\cdot\overline{q'} = p\cdot(q\cdot\overline{q})\cdot\overline{p}.$$

Но, как мы видели выше, $q\cdot\overline{q} = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$, так что окончательно получаем:

$$w'^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2 = p\,(w^2 + x^2 + y^2 + z^2)\overline{p}.$$

Здесь второй сомножитель справа есть скаляр, а при умножении скаляра M на кватернион имеет силу переместительный закон, так как

$$M\cdot p = Md + i\,(Ma) + j\,(Mb) + k\,(Mc) = pM.$$

Поэтому в данном случае:

$$w'^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2 = p\cdot\overline{p}\cdot(w^2 + x^2 + y^2 + z^2);$$

а так как $p\cdot\overline{p}$ есть квадрат тензора кватерниона p, то:

$$w'^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2 = (d^2 + a^2 + b^2 + c^2)\,(w^2 + x^2 + y^2 + z^2)^{1});$$

[1]) Эта формула по существу встречается уже у Лагранжа.

другими словами: **тензор произведения двух кватернионов равен произведению тензоров обоих сомножителей.** Конечно, эту формулу можно получить и прямым вычислением, если подставить вместо w', x', y', z' их выражения из формулы умножения на стр. 94.

Теперь будем интерпретировать кватернион q как **отрезок в пространстве четырех измерений**, идущий от начала координат к точке x, y, z, w, вполне аналогично интерпретации вектора в трехмерном пространстве. В настоящее время не приходится, конечно, извиняться, когда призываешь на помощь четырехмерное пространство, как то было необходимо в то время, когда я был студентом. Все вы знаете, что здесь не скрывается никакой метафизической идеи, но что многомерное пространство попросту есть удобное, аналогичное нашему действительному представлению о пространстве, средство математического способа выражения [1]).

Если сохранять постоянным множитель p, т. е. величины d, a, b, c, то уравнение в кватернионах $q' = p \cdot q$ изображает известное линейное преобразование точек x, y, z, w четырехмерного пространства в точки x', y', z', w', относя каждому четырехмерному вектору некоторый другой вектор; в явном виде уравнения преобразования получаются путем сравнения коэфициентов в формуле произведения на стр. 94. Но из только что полученного уравнения для тензоров видно, что при этом расстояние $\sqrt{x^2+y^2+z^2+w^2}$ всякой точки от начала помножается на один и тот же постоянный множитель $T=\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$; кроме того, как мы видели (стр. 95), определитель линейного преобразования всегда имеет положительное значение. С другой стороны, из аналитической геометрии в трехмерном пространстве известно, что такое линейное преобразование x, y, z, которое преобразовывает сумму $x^2+y^2+z^2$ в самое себя (так называемое „ортогональное" преобразование) и которое, кроме того, имеет всегда

[1]) Это требовало бы, однако, некоторых пояснений; но читатель найдет более обстоятельное выяснение этих идей во втором томе настоящего сочинения. *Ред.*

положительный определитель, изображает вращение пространства вокруг начала координат, и что всякое вращение может быть так представлено. Если же линейное преобразование лишь помножает $x^2+y^2+z^2$ на некоторого множителя T^2 и если определитель попрежнему сохраняет положительное значение, то получается вращение в соединении с растяжением всего пространства до T-кратных размеров при неподвижном начале координат. Такого рода преобразование мы будем называть **поворотным растяжением** (Drehstreckung). Но, что верно для трехмерного пространства, подходит и к четырехмерному. Мы будем говорить, что наше линейное преобразование в точно таком же смысле выражает **вращение и растяжение четырехмерного пространства.**

Однако не трудно видеть, что это еще не самый общий случай возможных преобразований вращения и растяжения. Действительно, наше преобразование содержит только четыре произвольных параметра a, b, c, d, тогда как мы сейчас увидим, что самое общее преобразование поворотного растяжения четырехмерного пространства R_4 содержит семь таких параметров. А именно, чтобы общее линейное преобразование изображало вращение с растяжением, необходимо должно иметь место следующее тождество:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 + w'^2 = T^2 \cdot (x^2 + y^2 + z^2 + w^2);$$

это дает нам при сравнении коэфициентов 10 условий, так как левая часть после замены $x', \ldots, w'$ их выражениями в $x, \ldots, w$ переходит в квадратичную форму четырех переменных и поэтому содержит $\frac{4 \cdot 5}{2} = 10$ членов. Но так как T остается произвольным, то всего имеем $10-1=9$ условий для 16 коэфициентов линейного преобразования, так что действительно остается еще $16-9=7$ произвольных параметров.

Но оказывается возможным, и это наиболее удивительно, получить с помощью перемножения кватернионов наиболее общий вид преобразования поворотного растяжения. А именно, если $\pi = \delta + i\alpha + j\beta + k\gamma$ представляет некоторый постоянный кватернион, то можно показать, подобно тому, как это было сделано выше, что и $q'=q \cdot \pi$

(что отличается от предыдущей формулы только изменением порядка сомножителей) представляет преобразование поворотного растяжения R_4, т. е. пространства четырех измерений, а вследствие этого и последовательное производство обоих преобразований:

$$q' = p \cdot q \cdot \pi = (d + ia + jb + kc) \cdot q \cdot (\delta + i\alpha + j\beta + k\gamma)$$

представляет подобное же преобразование. Но это преобразование содержит как раз семь произвольных параметров, так как оно остается неизменным, если a, b, c, d умножить на одно и то же вещественное число и в то же время разделить на него же $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; поэтому является вероятным, что оно представляет общий вид преобразования поворотного растяжения в пространстве четырех измерений; эта красивая теорема действительно была доказана Кели (Cayley). Я ограничусь здесь этими историческими указаниями, чтобы не затеряться в деталях этой интерпретации. Указанная формула находиться в работе Кели „On the homographic transformation of a surface of the second ordre into itself" [1]) 1854 г., а также и в некоторых других его работах [2]).

Другое большое преимущество формулы Кели заключается в том, что она дает весьма наглядное представление о результате последовательного производства двух поворотных растяжений. Действительно, если второе преобразование дано уравнением:

$$q'' = w'' + ix'' + jy'' + kz'' = p' \cdot q' \cdot \pi',$$

где p', π' обозначают определенные данные кватернионы, то, внося сюда написанную выше величину q', получим:

$$q'' = p' \cdot (p \cdot q \cdot \pi) \cdot \pi';$$

на основании сочетательного закона умножения находим:

$$q'' = (p' \cdot p) \cdot q \cdot (\pi \cdot \pi') = r \cdot q \cdot \varsigma,$$

где

$$r = p' \cdot p, \quad \varsigma = \pi \cdot \pi'$$

[1]) Напечатано в полном собрании сочинений Кели: Cayley, Collected mathematical papers, Vol. II (Cambridge 1899), стр. 133.

[2]) Ср., например, „Recherches ultérieures sur les déterminants gauches (loc. cit., стр. 214).

представляют определенные новые кватернионы. Получается снова выражение поворотного растяжения, переводящего q в q'', как раз в прежнем виде, а именно, передним и задним множителями при q служат произведения обоих передних и, соответственно, задних множителей в выражениях последовательно производимых поворотных растяжений, причем порядок играет существенную роль.

Но вы, может быть, недовольны этой четырехмерной интерпретацией и хотите что-либо более наглядное, основанное на обычном трехмерном представлении о пространстве. В таком случае я постараюсь получить из предыдущих формул, посредством простой специализации, формулы для аналогичных операций в трехмерном пространстве; в этих именно формулах и заключается громадное значение умножения кватернионов для обыкновенной физики и механики; я говорю нарочно—для обыкновенной, чтобы не предрешать дальнейшего развития этих дисциплин, благодаря которому могут получить непосредственное приложение и предыдущие интерпретации. И это время, может быть, ближе, чем вы думаете; новейшие исследования в теории электронов, в том виде, в каком они находят себе выражение в так называемом принципе относительности, представляют собой, в сущности, не что иное, как последовательное применение поворотных растяжений пространства четырех измерений; в этом именно порядке идей эти исследования и были недавно изложены проф. Минковским (Minkowski) [1]).

Во всяком случае понятие о вращении с растяжением в четырехмерном пространстве R_4 находится в самой тесной связи с основаниями „принципа относительности" в электродинамике, который вот уже несколько лет самым живым образом занимает физиков. А именно,— как я вкратце покажу,—те „преобразования Лоренца", на изучении которых основаны исследования, относя-

[1]) После того как это было напечатано по упомянутой специальной теории относительности появилась обширная литература. Здесь укажу только на мою лекцию „О геометрических основаниях лоренцовой группы" помещенную в „Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung", Bd. 19, стр. 299, 1910 г.; см. также Klein, Gesam. Mathem. Werke, I, стр. 533. (Русск. перевод см. „Новые идеи в математике", сб. № 5. 1914 г.).

щиеся к „принципу относительности“, представляют не что иное, как вращение некоторого пространства R_4, и могут быть даже представлены самым удобным образом с помощью формул исчисления кватернионов.

Как известно, под преобразованием Лоренца понимают такую линейную однородную подстановку трех координат в пространстве x, y, z и времени t с вещественными коэфициентами:

$$\left.\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ t' &= a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}t, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

которая преобразовывает квадратичную форму $x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$ (где c есть скорость света) в самое себя, так что

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2, \quad (2)$$

и у которой последний коэфициент

$$\frac{dt'}{dt} = a_{44} > 0. \quad (3)$$

При этом ради краткости не принято во внимание могущее иметь место смещение начальной точки $x = y = z = t = 0$.

Оказывается, что в исчислении кватернионов легко можно показать такую подстановку, которая удовлетворяет условию (2), если только на первое время оставить без внимания требование вещественности коэфициентов и неравенство (3). А именно, стоит только рассматривать такие кватернионы, компонентами которых являются не вещественные, а обыкновенные комплексные числа, образованные с помощью обыкновенной мнимой единицы $\sqrt{-1}$ (которую следует, конечно, отличать от специальных единиц исчисления кватернионов i, j, k). Заметим прежде всего, что полученные таким образом кватернионы

$$\left.\begin{aligned} q &= \sqrt{-1}\cdot c\cdot t + ix + jy + kz, \\ q' &= \sqrt{-1}\cdot c\cdot t' + ix' + jy' + kz' \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{Ia})$$

имеют своими тензорами как раз квадратные корни из квадратичных форм (2). Поэтому можно точно так же, как выше (стр. 102—105), доказать, что формула

$$q' = \frac{p\cdot q\cdot \pi}{M} \quad (\mathrm{Ib})$$

изображает линейную подстановку, удовлетворяющую условию (2), если p и π представляют любые кватернионы, тоже с комплексными слагающими, а M означает корень квадратный из произведения их тензоров.

Чтобы получить вещественные коэфициенты и удовлетворить условию (3), надо только взять для p и π некоторым образом сопряженные кватернионы, а именно, вводя подходящие параметры, мы получим следующие крайне простые рациональные формулы.

Пусть $A, A', \ldots, D, D'$ означает восемь вещественных величин, связанных таким уравнением:

$$AA' + BB' + CC' + DD' = 0 \quad (\mathrm{IIa})$$

и таким неравенством:

$$A^2 + B^2 + C^2 + D^2 > A'^2 + B'^2 + C'^2 + D'^2. \quad (\mathrm{IIb})$$

Тогда мы получим:

$$\left.\begin{aligned} p &= (D + \sqrt{-1}\ D') + i\ (A + \sqrt{-1}\ A') + \\ &\quad + j\ (B + \sqrt{-1}\ B') + k\ (C + \sqrt{-1}\ C'), \\ \pi &= (D - \sqrt{-1}\ D') - i\ (A - \sqrt{-1}\ A') - \\ &\quad - j\ (B - \sqrt{-1}\ B') - k\ (C - \sqrt{-1}\ C'), \\ M &= (A^2 + B^2 + C^2 + D^2) - (A'^2 + B'^2 + C'^2 + D'^2). \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{IIc})$$

Формулы (I) совместно с условиями (II) дают изображение всех преобразований Лоренца.

Сам Минковский (Minkowski), впрочем, пользуется в своих работах вместо исчисления кватернионов символикой матриц Кели, которая позволяет наряду с преобразованиями Лоренца изобразить инварианты, принадлежащие к их группе[1]).

---

[1]) „Die Grundgleichungen für elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern“, „Nachr. der K. Gesellschaft der Wissenschaften“ Göttingen, math-phys. Kl., 1908, S. 53; „Mathematische Annalen“, 68, S. 472.

Но вернемся к трем измерениям. При поворотном растяжении точка x, y, z переходит в такую точку x', y', z', что

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = M^2\,(x^2 + y^2 + z^2),$$

где M обозначает линейное растяжение всякой длины. Ввиду того, что наиболее общее линейное преобразование переменных x, y, z в x', y', z' содержит $3 \cdot 3 = 9$ коэфициентов, а левая часть после введения этих выражений переходит в квадратичную форму от x, y, z с $\frac{3 \cdot 4}{2} = 6$ членами, наше тождество при произвольном M представляет $6 - 1 = 5$ условий, и все линейные подстановки, удовлетворяющие ему, содержат еще $9 - 5 = 4$ произвольных параметра (ср. аналогичные рассуждения на стр. 103). Если одна из этих подстановок имеет положительный определитель, то она изображает, как уже было упомянуто, вращение пространства около начала, соединенное с растяжением в отношении $1 : M$; если же определитель имеет отрицательное значение, то подстановка соответствует такому же поворотному растяжению соединенному с зеркальным отражением пространства, определяемым равенствами $x' = -x,\ y' = -y,\ z' = -z$. С другой стороны, можно показать, что этот определитель может принимать только значения $\pm M^3$.

Чтобы представить эти отношения с помощью кватернионов, мы, конечно, сперва сведем неопределенные кватернионы q, q' к их векториальной составной части $q' = ix' + jy' + kz'$, $q = ix + jy + kz$; это — векторы, соединяющие начало координат с точкой до и после преобразования. И вот я утверждаю, что наиболее общее преобразование трехмерного пространства, представляющее собой поворотное растяжение, получится, если взять в предыдущих формулах для p и π сопряженные значения, т. е. если положить:

$$q' = p \cdot q \cdot \bar{p}, \tag{1}$$

или, выписывая подробно:

$$ix' + jy' + kz' = (d + ia + jb + kc) \cdot (ix + jy + kz) \cdot \cdot (d - ia - jb - kc). \tag{1'}$$

Чтобы это доказать, надо прежде всего убедиться в том, что скалярная часть произведения, стоящего справа, обращается в нуль, и что, следовательно, q' действительно есть вектор. Для этого перемножим сперва $p \cdot q$ по правилам для кватернионов; мы находим:

$$q' = \left\{ -ax - by - cz + {} + i\,(dx + bz - cy) + {} + j\,(dy + cx - az) + {} + k\,(dz + ay - bx) \right\} \cdot \left\{ d - ia - jb - kc \right\};$$

после вторичного перемножения кватернионов действительно получается для скалярной части q' значение 0, а для его трех векториальных составляющих получаются выражения:

$$\left.\begin{aligned} x' &= (d^2 + a^2 - b^2 - c^2)\,x + 2\,(ab - cd)\,y + 2\,(ac + bd)\,z, \\ y' &= 2\,(ab + cd)\,x + (d^2 + b^2 - c^2 - a^2)\,y + 2\,(bc - ad)\,z, \\ z' &= 2\,(ac - bd)\,x + 2\,(bc + ad)\,y + (d^2 + c^2 - a^2 - b^2)\,z. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Остается показать, что эти формулы действительно выражают требуемое преобразование. Это сразу получается, если составить относящееся к равенству (1) уравнение в тензорах (см. стр. 101):

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = (d^2 + a^2 + b^2 + c^2)\,(x^2 + y^2 + z^2)\,(d^2 + a^2 + b^2 + c^2),$$

или

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = T^4\,(x^2 + y^2 + z^2),$$

где T обозначает тензор p. Далее, мы сразу видим, что наша формула действительно содержит четыре произвольных параметра, которые, согласно предыдущему подсчету, входят в состав наиболее общего преобразования этого вида. Чтобы разрешить также и вопрос о знаке определителя, достаточно взять один какой-нибудь пример; действительно, так как тензор T всегда имеет положительное значение и никогда не обращается в нуль, то при изменении значений a, b, c, d определитель как непрерывная функция никогда не может принять значения $-T^6$, если он хоть раз принимает значение $+T^6$; а между тем только эти два значения, как выше было

замечено, и идут в соображение. Если же, например, положить $a = b = c = d$, то определитель подстановки (2) равняется:

$$\begin{vmatrix} d^2, & 0, & 0 \\ 0, & d^2, & 0 \\ 0, & 0, & d^2 \end{vmatrix} = d^6 = +T^6;$$

следовательно, *он имеет всегда положительное значение*, и поэтому наше преобразование, выражаемое соотношением (1), в самом деле изображает *всегда действительное вращение и растяжение*. После этого столь же просто изобразится *поворотное растяжение, соединенное еще с отражением*; для этого надо лишь написать: $\overline{q'} = p \cdot q \cdot p$, ибо это и есть соединение предыдущего преобразования с отражением:

$$x' = -x, \quad y' = -y, \quad z' = -z\ ^{1)}.$$

Теперь посмотрим, как расположена *ось того вращения*, которое определяется равенствами (2), и каков *угол вращения*. Пусть ξ, η, ζ означают косинусы направления оси вращения, так что

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1, \tag{3}$$

---

[1]) Преобразование $x' = -x$, $y' = -y$, $z' = -z$ не есть, собственно, отражение от какой-либо плоскости, ибо оно оставляет без изменения только начало координат. Это есть преобразование, *симметричное относительно начала*, т. е. каждая точка переходит в точку, симметричную с ней относительно начала координат. Но это преобразование слагается из трех отражений:

$$\begin{aligned} x' &= -x, & y' &= y, & z' &= z; \\ x'' &= x', & y'' &= -y', & z'' &= z'; \\ x''' &= x'', & y''' &= y'' & z''' &= -z''. \end{aligned} \tag{!}$$

Если мы любую точку (x, y, z) отразим последовательно от трех плоскостей координат, то она перейдет в точку (x', y', z'), симметричную ей относительно начала. Однако два первых отражения (!) могут быть заменены вращением вокруг начала координат, а именно — вращением, замещающим положительную полуось x-ов отрицательной полуосью y-ов и положительную полуось y-ов отрицательной полуосью x-ов. Рассматриваемое преобразование, таким образом, действительно слагается из вращения, подобного растяжения и отражения от плоскостей. Более обстоятельное выяснение идеи геометрического преобразования читатель найдет во второй части настоящего сочинения. *Ред.*

а угол (или амплитуду) вращения обозначим через ω. Оказывается, что имеют место следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned} &d = T \cdot \cos\frac{\omega}{2}; \\ &a = T \cdot \xi \cdot \sin\frac{\omega}{2}, \quad b = T \cdot \eta \cdot \sin\frac{\omega}{2}, \quad c = T \cdot \zeta \cdot \sin\frac{\omega}{2}; \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

из них легко определить при известных a, b, c, d четыре величины ξ, η, ζ, ω и притом так, что выполняется соотношение (3); в самом деле, из соотношения:

$$d^2 + a^2 + b^2 + c^2 = T^2 \left\{ \cos^2\frac{\omega}{2} + \sin^2\frac{\omega}{2}(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) \right\},$$

получаемого посредством сложения уравнений (4) по возвышении обеих частей каждого уравнения в квадрат, вытекает соотношение (3), так как T определено как тензор кватерниона p. Поэтому для определения ξ, η, ζ достаточны получающиеся из системы (4) уравнения:

$$a : b : c = \xi : \eta : \zeta, \tag{4'}$$

которые говорят, что *точка* (a, b, c) *лежит на оси вращения рассматриваемого преобразования*.

Переходя к доказательству этих утверждений, начнем с проверки последнего свойства; для этого положим в уравнениях (2) $x = a$, $y = b$, $z = c$; тогда получим:

$$\begin{aligned} x' &= (d^2 + a^2 + b^2 + c^2)\, a = T^2 \cdot a, \\ y' &= (d^2 + a^2 + b^2 + c^2)\, b = T^2 \cdot b, \\ z' &= (d^2 + a^2 + b^2 + c^2)\, c = T^2 \cdot c; \end{aligned}$$

из этих равенств видно, что точка (x', y', z') лежит на прямой, проходящей через начало координат и через точку (a, b, c); а это именно и характеризует точку (a, b, c) как точку оси вращения. Остается только доказать, что угол ω, определяемый уравнениями (4), действительно представляет амплитуду вращения. Но это требует сложных рассуждений, вместо которых я укажу на то, что наши формулы преобразования (2) при $T = 1$, в силу соотношения (4), переходят как раз в те формулы, которые Эйлер установил для вращения системы координат вокруг оси

ξ, η, ζ на угол ω. В более подробном виде вы это найдете, например, в книге: „Теория волчка“[1]) Клейна-Зоммерфельда, в которой применяется теория кватернионов, или в книге „Теория и применения определителей“ Бальцера[2]).

Я хочу еще показать вам сжатое и удобное выражение, которое исчисление кватернионов дает для вращения вокруг оси ξ, η, ζ на угол ω, соединенного с растяжением в T^2 раз; это выражение получается, если подставить формулы (4) в уравнения (1):

$$ix' + jy' + kz' = T^2\left\{\cos\frac{\omega}{2} + \sin\frac{\omega}{2}(i\xi + j\eta + k\zeta)\right\}\cdot$$
$$\cdot\left\{ix + jy + kz\right\}\cdot\left\{\cos\frac{\omega}{2} - \sin\frac{\omega}{2}(i\xi + j\eta + k\zeta)\right\}. \tag{5}$$

Здесь все Эйлеровы формулы вращения совмещены в одну, которая легко запечатлевается в памяти: в ней вектор $ix + jy + kz$ спереди и сзади помножается на сопряженные кватернионы с тензором, равным единице, или на так называемые в е р з о р ы (т. е. вращатели, в отличие от т е н з о р а т. е. растягивателя), и к этому произведению присоединяется в качестве скалярного множителя величина растяжения.

Теперь я намерен показать вам, что в случае двух измерений эти формулы дают как раз известное выражение вращения и растяжения плоскости xy посредством умножения двух комплексных чисел (ср. стр. 88). Для этого стоит только принять за ось вращения в уравнениях (5) ось z ов ($\xi = \eta = 0$, $\zeta = 1$); тогда получаем для $z = z' = 0$:

$$ix' + jy' = T^2\left(\cos\frac{\omega}{2} + k\sin\frac{\omega}{2}\right)\left(ix + jy\right)\left(\cos\frac{\omega}{2} - k\sin\frac{\omega}{2}\right);$$

[1]) K l e i n - S o m m e r f e l d, Theorie des Kreisels, Heft 1, § 7, S. 55 ff. Второе издание появилось в 1914 г.

[2]) B a l t z e r, Theorie und Anwendung der Determinanten, § 1, 4, S. 187.

произведя нужные умножения на основании правил об умножении единиц находим:

$$ix' + jy' = T^2\left\{\cos\frac{\omega}{2}(ix + jy) + \sin\frac{\omega}{2}(jx - iy)\right\}\left\{\cos\frac{\omega}{2} - k\sin\frac{\omega}{2}\right\} =$$
$$= T^2\left\{\cos^2\frac{\omega}{2}(ix + jy) + 2\sin\frac{\omega}{2}\cos\frac{\omega}{2}(jx - iy) - \sin^2\frac{\omega}{2}(ix + jy)\right\} =$$
$$= T^2\left\{(ix + jy)\cos\omega + (jx - iy)\sin\omega\right\} =$$
$$= T^2(\cos\omega + k\sin\omega)(ix + jy).$$

Если прибавить позади обеих частей равенства по множителю $(-i)$, то получим:

$$x' + ky' = T^2(\cos\omega + k\sin\omega)(x + ky),$$

а это именно и есть известная формула умножения двух обыкновенных комплексных чисел с его геометрическим толкованием, как вращения на амплитуду ω и растяжения в T^2 раз, с той только разницей, что вместо мнимой единицы $\sqrt{-1}$, обычно обозначаемой через i, здесь стоит k.

Возвращаясь снова к трехмерному пространству, постараемся так видоизменить формулу (1), чтобы она изображала собой одно только растяжение без вращения. Для этого заменим x', y', z' через $x' \cdot T^2$, $y' \cdot T^2$, $z' \cdot T^2$ и, следовательно, q' через $q' \cdot T^2$; вспоминая же, что $p^{-1} = \frac{1}{p} = \frac{p}{T^2}$, находим следующую формулу чистого вращения:

$$ix' + jy' + kz' = p(ix + jy + kz)\;p^{-1}. \tag{6}$$

Мы не нарушим общности, если будем принимать в этой формуле p за кватернион с тензором 1:

$$p = \cos\frac{\omega}{2} + \sin\frac{\omega}{2}(i\xi + j\eta + k\zeta), \quad \text{где } \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1;$$

поэтому формула (6) может быть получена из уравнений (5), если принять T равным единице. В этом виде формула впервые была дана Кели в 1845 г.[1]).

Последовательное проведение двух вращений в трехмерном пространстве выражается столь же просто, как

[1]) C a y l e y, On certain results relating to quaternions Coll. pap., I (1889), pag. 123.

и в случае четырехмерного пространства (стр. 104). Если дано второе вращение:

$$ix'' + jy'' + kz'' = p' \cdot (ix' + jy' + kz')\, p'^{-1},$$

где

$$p' = \cos\frac{\omega'}{2} + \sin\frac{\omega'}{2}(i\xi' + j\eta' + k\zeta')$$

(ξ', η', ζ' — ось, ω' — амплитуда), то снова находим в качестве изображения получающегося вращения:

$$ix'' + jy'' + kz'' = p' \cdot p \cdot (ix + jy + kz) \cdot p^{-1} \cdot p'^{-1}.$$

так что ось ξ'', η'', ζ'' и угол вращения ω'' получаются из равенства:

$$p'' = \cos\frac{\omega''}{2} + \sin\frac{\omega''}{2}(i\xi'' + j\eta'' + k\zeta'') = p' \cdot p.$$

Таким образом мы снова получаем для сложения двух вращений простое и сжатое выражение формул, довольно сложных в их обычном виде. Но с другой стороны, — ввиду того, что всякий кватернион, не считая некоторого вещественного множителя (его тензора), можно в то же время рассматривать как верзор некоторого вращения, — *мы имеем в сложении вращений простой геометрический эквивалент умножения кватернионов; некоммутативность произведения кватернионов соответствует при этом тому известному обстоятельству, что вообще нельзя менять порядка двух вращений вокруг одной точки без изменения окончательного результата.*

Если вы интересуетесь подробностями относительно истории возникновения рассмотренной нами интерпретации и приложений кватернионов, а также теории вращений системы координат, то обратитесь к в высшей степени ценному реферату самого Кели по динамике: „Об успехах, достигнутых в решении некоторых специальных проблем динамики“ [1]).

[1]) Cayley, Report on the progress of the solution of certain special problems of dynamics, Collect. math. papers, Vol. IV, стр. 552 (Cambridge 1891).

В заключение я приведу несколько общих соображений о значении и распространении кватернионов. При этом следует, конечно, отличать собственно умножение кватернионов от общего исчисления кватернионов. Первое представляет собой нечто в высшей степени полезное, как достаточно видно из предыдущего. Напротив, общее исчисление, как его понимал Гамильтон, рассматривает сложения, умножения, деления кватернионов в любом порядке, — другими словами, оно составляет алгебру кватернионов; соединяя инфинитезимальные процессы, можно дойти даже до теории функций в области кватернионов. Конечно, ввиду того, что переместительный закон здесь не имеет места, все обстоит здесь совершенно иначе, чем в теории обыкновенных комплексных переменных. Но есть полное основание утверждать, что эти общие, широко задуманные идеи Гамильтона не оправдали себя, т. е. они не вошли в соприкосновение и в живой обмен идей с другими дисциплинами математики и ее приложений и потому не вызвали общего интереса.

Но в математике приходится наблюдать то же, что и в человеческой жизни: наряду со спокойными, объективными взглядами большинства выступают страстные индивидуальные убеждения. Так и кватернионы имеют своих приверженцев-энтузиастов и своих страстных противников. Первые, особенно многочисленные в Англии и в Америке, прибегли — вот уже 12 лет — к современному средству: они основали „Всемирный союз для развития учения о кватернионах“ [1]): президентом его состоял сер Роберт Болл (Robert Ball), а основано оно в качестве вполне интернационального учреждения японцем Кимура (Kimura), получившим в Америке высшее образование. От интенсивного изучения кватернионов их сторонники ожидают совершенно особенного преуспевания математики. В противоположность этому, вторые, противники кватернионов, не хотят о них и слышать и этим отказываются даже от столь полезного умножения: они исходят из того взгляда, что все вычисления с кватернионами сводятся в конечном счете к вычислению с четырьмя составляющими

[1]) Любопытно, что в составе союза состояли некоторые решительные противники кватернионов.

и что единицы и таблица их произведений представляют излишнюю роскошь. Я думаю, что оба направления одинаково далеко отклонились от правильного среднего пути.

[Несколько странно, что автор игнорирует ту точку зрения на кватернион, которая руководила Гамильтоном при самом создании кватернионов. Правда, эта точка зрения связана с учением о преобразовании пространства посредством растяжения и вращения (повторное растяжение), выражаемого произведением кватернионов, но она все-таки имеет свои существенно своеобразные черты и играет в истории кватернионов очень важную роль. Сущность этой точки зрения заключается в том, что кватернион представляет собою отношение двух векторов трехмерного пространства. Этот взгляд ведет свое начало от учения Беллавитиса. Этот итальянский геометр первый дал систематически проведенную геометрическую интерпретацию обыкновенных комплексных чисел. Беллавитис изображает комплексные числа векторами на некоторой плоскости Q, как это делали многие другие авторы до и после него (Валлис, Весель, Аргон, Гаусс, Коши) [1].

Но он вводит также умножение вектора на комплексное число. Под произведением вектора $\mathfrak{a}$ на комплексное число $q = r(\cos\omega + i\sin\omega)$ Беллавитис разумеет вектор $\mathfrak{b}$, длина которого получается умножением длины вектора $\mathfrak{a}$ на положительное число r, а направление определяется поворотом вектора $\mathfrak{a}$ на угол ω. Так как при этом $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}\cdot q$, то комплексное число q можно рассматривать как отношение вектора $\mathfrak{b}$ к вектору $\mathfrak{a}$.

Исходя из этой идеи Беллавитиса, Гамильтон ставит себе задачей построить комлексные числа, которыми можно было бы выразить отношение любых двух векторов в пространстве. В плоскости, определяемой этими векторами, это отношение выразится по Беллавитису обыкновенным комплексным числом, которое зависит от двух вещественных чисел; для определения расположения плоскости (т. е. направления нормали к ней) нужны еще два вещественных числа. Таким образом комплексные числа, выражающие отношение двух векторов в пространстве, должны определяться каждое четырьмя вещественными числами, — это кватернионы. Построение теории кватернионов по этому замыслу изложено Гамильтоном в сочинении „Elements of quaternions“, опубликованном в 1866 г. В более раннем сочинении „Lectures on quaternions“ (1853), как и в предварительных мемуарах, Гамильтон исходит из иных соображений, близких к тем, которые изложены в тексте.

Ред.]

[1]) Систематически проведенное изложение метода содержится в сочинении G. Bellavitis, Sposizione del metodo delle equipollenze; Modena 1854. Но в отдельных мемуарах он излагался значительно раньше, начиная с 1832 г.

4. Комплексные числа в преподавании.

Покидая теорию кватернионов, я хочу закончить эту главу несколькими замечаниями относительно той роли, какую эти понятия играют в школьном преподавании. Конечно, никому не приходит в голову обучать в школе кватернионам, но зато постоянно заходит речь об обыкновенных комплексных числах $x + iy$. Быть может, не будет лишено интереса, если я вместо длинных рассуждений о том, как это обыкновенно излагают и как следовало бы излагать, покажу вам на примере трех книг из различных эпох, как развивалось исторически преподавание этих вещей.

Я предлагаю вашему вниманию прежде всего книгу Кестнера (Kästner), который во вторую половину XVIII в. занимал в Гёттингене руководящее положение. В то время еще обучали в университете тем вещам из элементарной математики, которые впоследствии, около 30-х годов XIX в. перешли в школу; поэтому и Кестнер читал тогда популярно-математические лекции, которые посещались в большом числе и не-математиками. Его учебник, лежавший в основе этих лекций, носит название „Начальные основания математики“ [1]); нас интересует в данном случае 2-й отдел 3-й части: „Начальные основания анализа конечных величин“ [2]). Там на странице 20 начинается изложение мнимых величин приблизительно в следующих словах: „Тот, кто требует извлечь корень с четным показателем

[1]) „Mathematische Anfangsgründe“.

[2]) „Anfangsgründe der Analysis endlicher Grössen“, 3 Aufl., Göttingen 1791.

из „отрицаемой" величины („verneint" — так тогда говорили вместо „отрицательный", „negativ"), требует невозможного, ибо нет ни одной отрицаемой величины, которая была бы такою степенью". Все это совершенно справедливо, но затем на странице 34 читаем: „Такие корни называются невозможными или мнимыми". Вслед за этим замечанием автор оперирует с ними совершенно спокойно, как с обыкновенными числами, не заботясь особенно об оправдании такого обращения с ними, хотя он только что и отрицал их существование, — как будто бы неразумное, благодаря присвоению определенного имени, внезапно стало годным к употреблению. Вы узнаете здесь отражение точки зрения Лейбница, согласно которой мнимые числа представляют в сущности нечто совершенно нелепое, но, тем не менее, они непонятным образом ведут к правильным результатам.

Вообще Кестнер писал весьма забавно; он даже получил известность в литературе своими эпиграммами. Так, в введении к упомянутой книге он распространяется относительно происхождения слова „алгебра", которое принадлежит, конечно, арабам, как показывает член „*al*".

Под алгебраистом надо, по мнению Кестнера, понимать человека, который „делает целыми" дроби, — другими словами занимается рациональными функциями, приводит их к общему знаменателю и т. д. Первоначально это якобы относилось также к деятельности врача-хирурга, который лечит при переломе костей. Кестнер приводит при этом в виде примера Дон-Кихота, который отправляется к алгебраисту с тем, чтобы последний расправил ему поломанные ребра. Остается открытым вопрос о том, держался ли здесь Сервантес принятого словоупотребления или же здесь надо видеть сатиру.

Вторая книга вышла в свет на много лет позже и принадлежит берлинскому професору Ому: „Опыт вполне последовательной системы математики" [1]); эта книга имеет то же назначение, что и книга Кестнера, и одно время была очень распространена. Но Ом стоит гораздо ближе к современной точке зрения, так как он ясно высказывает

[1]) M. Ohm, „Versuch eines vollständig konsequenten Systems der Mathematik", 9 Bände, Berlin 1828, Bd. 1 (Arithm. u. Algebra), стр. 276.

принцип расширения числовой области. „Подобно отрицательным числам, — говорит он, — должно и символ $\sqrt{-1}$ присоединить к вещественным числам, как новую вещь". Геометрическое толкование, конечно, не было ему еще известно: это было накануне появления упомянутой выше работы Гаусса (1831).

Наконец, я хочу познакомить вас с одним из многочисленных современных учебников, которым очень много пользуются: это „Сборник задач" Бардея [1]). Здесь на первый план выступает принцип расширения, а впоследствии дается и геометрическое толкование. В этом, действительно, заключается теперь общепринятая точка зрения школьного преподавания, хотя в отдельных местах развитие и задержалось на предыдущей ступени. На мой взгляд, такое изложение вопроса является наиболее подходящим для школы: не утомляя ученика систематическим изложением и не вдаваясь, конечно, в абстрактно логические рассуждения, следует толковать комплексные числа как расширение уже известного понятия о числе, избегая при этом, разумеется, всякой мистической окраски; но прежде всего должно приучить ученика к наглядному геометрическому толкованию их в комплексной плоскости!

Мы пришли к концу первой главной части наших лекций, посвященной арифметике. Прежде чем перейти к таким же пояснениям, относящимся к алгебре и анализу, я хотел бы сделать довольно продолжительное отступление исторического характера, которое бросает новый свет на общую постановку современного преподавания, а также на то, что мы решили бы в нем улучшить.

V. СОВРЕМЕННОЕ РАЗВИТИЕ И СТРОЕНИЕ МАТЕМАТИКИ ВООБЩЕ.

Позвольте мне начать с замечания, что в истории развития математики до самого последнего времени очень ясно выступают два различных ряда развития, которые то сменяют друг друга, то выступают одновременно и независимо один от другого, то, наконец, взаимно переплетаются. Различие, которое я имею в виду, трудно выразить сло-

[1]) Bardey, „Aufgabensammlung", Neue Auflage, besorgt von F. Pietzker und O. Presler, 5 Aufl., Leipzig, 1907 p. 96 ff.

вами, так как ни одно из обычных подразделений не подходит вполне. Во всяком случае вы поймете его лучше всего на конкректном примере, а именно, если я покажу вам, как в действительности пришлось бы построить самые элементарные главы системы анализа в духе того и другого ряда эволюции.

Если следовать одному из них, — мы будем называть его рядом эволюции A, — то получается следующая система, которая преимущественно господствует теперь в школах и в элементарных руководствах:

1. Главное место занимает формальное учение об уравнениях, следовательно, действия с целыми рациональными функциями и изучение тех случаев, в которых алгебраические уравнения разрешимы в радикалах.

2 При систематическом развитии понятия о степени и ее обращении возникают логарифмы, которые оказываются весьма полезными при числовых вычислениях.

3 Между тем как до сих пор геометрия оставалась совершенно изолированной от арифметики и анализа, у нее теперь производят заем, который доставляет первые определения трансцендентных функций другого рода, именно тригонометрических функций; дальнейшая теория этих функций строится затем в виде отдельной дисциплины.

4. За этим следует алгебраический анализ, который учит разлагать простейшие функции в бесконечные ряды; здесь рассматриваются бином Ньютона в общем виде, логарифм и его обращение — показательная функция — и тригонометрические функции. Сюда же относится общая теория бесконечных рядов и действий с ними. При этом обнаруживаются поразительные соотношения между названными элементарными трансцендентными функциями, в особенности знаменитая формула Эйлера:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Эти соотношения представляются тем более удивительными, что они устанавливают связь между функциями, определения которых были взяты из совершенно различных областей.

5. За пределами школьной математики к этому построению примыкает в качестве естественного продолжения

теория функций комплексного переменного Вейерштрасса (Weierstrass).

Теперь я представлю в общих чертах схему второго ряда эволюции B; здесь в общем господствует мысль аналитической геометрии, а именно — идея слияния представлений числа и пространства. Соответственно этому:

1. Начинают с графического изображения простейших функций — многочленов и рациональных функций одного переменного. Точки пересечения кривых, получаемых при этом, с осью абсцисс определяют корни многочленов. Сюда же, естественно, примыкает учение о приближенном решении численных уравнений.

2. Геометрический образ кривой является естественным и наглядным источником для понятия о производной и об интеграле; к первому приводит подъем или падение кривой, ко второму — площадь, заключенная между кривой и осью абсцисс.

3. Во всех случаях, когда процесс интегрирования (или нахождение квадратур в узком смысле слова) не может быть выполнен в явном виде с помощью рациональных функций, он дает повод к возникновению новых функций, которые таким образом вводятся вполне естественно и единообразно. Так, квадратура гиперболы дает определение логарифма:

$$\int_1^x \frac{dx}{x} = \ln x,$$

между тем как квадратура круга легко сводится к интегралу

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x,$$

другими словами, к обращениям тригонометрических функций. Как вам известно, этот же самый ход мыслей приводит далее к новым высшим классам функций, в частности к эллиптическим функциям.

4. Разложение всех полученных таким путем функций в бесконечные степенные ряды производится опять-таки

по однообразному принципу — на основании теоремы Тейлора.

5. Высшим применением этого приема является аналитическая теория функций комплексного переменного Коши-Римана, основанная на диференциальных уравнениях Коши-Римана или на теореме об интегралах Коши.

Если мы пожелаем четко выразить в немногих словах результат этого обзора, то можно сказать, что в случае первого ряда A в основе лежит тенденция к дроблению, т. е. такое понимание науки, которое всю ее область разбивает на ряд частей, вполне отграниченных одна от другой, и в каждой из них стремится обойтись минимумом вспомогательных средств, по возможности избегая заимствований у соседних областей; идеалом здесь является изящно выкристаллизованное, логически замкнутое в себе построение каждой отдельной области. В противоположность этому, приверженец направления B придает главное значение как раз органической связи между отдельными областями и многочисленным случаям их взаимного содействия; соответственно этому, он предпочитает те методы, которые дают ему одновременное понимание многих областей с одной и той же точки зрения; его идеал состоит в том, чтобы обнять все математические науки, как одно целое.

Не может быть сомнения относительно того, которое из двух направлений более жизненно, которое из них способно в большей степени заинтересовать ученика, — если только он не имеет специального предрасположения к абстрактно-математическим рассуждениям. Возьмем для примера, чтобы лучше себе это уяснить, функции e^x и $\sin x$, относительно которых нам придется именно по этому же поводу еще много говорить. В системе A — к сожалению, к ней в данном случае почти исключительно примыкает школа — они представляются совершенно разнородными: функция e^x и, соответственно, логарифм появляются в качестве удобного вспомогательного средства при численных выкладках, а $\sin x$ возникает в геометрии треугольника. Как же после этого понять то обстоятельство, что эти функции находятся в столь простой зависимости между собой, и особенно то, что в самых разнообразных областях, не имеющих ничего общего ни с техникой

вычислений, ни с геометрией, они постоянно и неожиданно появляются как естественное выражение царящих там законов? Названия „функция сложных процентов“ или „закон органического роста“, которые давали функции e^x и, с другой стороны, тот факт, что $\sin x$ играет центральную роль всюду, где идет речь о колебаниях, показывают, как далеко заходит возможность их применения. В системе же B все это представляется вполне понятным и соответствующим значению функций, отмеченному с самого начала. Ведь здесь функции e^x и $\sin x$ возникают из одного источника, из квадратуры простых кривых, а это приводит, как мы увидим ниже, к диференциальным уравнениям простейшего типа $\left(\frac{de^x}{dx} = e^x, \frac{d^2 \sin x}{dx^2} = -\sin x\right)$, которые составляют естественную основу всех упомянутых приложений.

Но для полного понимания развития математики необходимо еще вспомнить о третьем моменте C, который очень часто играет важную роль то отдельно, то вместе с рядами эволюции A и B. Речь идет о том, что обозначают словом алгорифм, возникшим из искаженного имени одного известного арабского математика. Алгорифмом является, в сущности, всякое строго установленное формальное счисление, — в частности, буквенное счисление. Мы уже неоднократно отмечали, какую огромную роль в развитии науки играл алгорифмический процесс, являясь как бы самостоятельной движущей силой, присущей самим формулам и оказывающей свое действие независимо от намерения и предвидения того или другого математика и часто даже вопреки его желанию. Так и в начале развития исчисления бесконечно малых алгорифм, как мы еще при случае увидим, часто побуждал к созданию новых понятий и действий даже прежде, чем математики могли отдать себе отчет в их допустимости. Даже на высших ступенях развития эти алгорифмические моменты могут приносить пользу и действительно приносили ее, так что их можно назвать подпочвой развития математики. Поэтому оставлять в стороне эти моменты, как играющие в развитии математики исключительно формальную роль, — а это теперь в моде, — значит не считаться с историческим ходом развития науки.

Я хотел бы проследить теперь подробнее контраст между этими различными направлениями в работе математиков на протяжении всей истории математики; при этом я, разумеется, буду иметь возможность упомянуть лишь самые важные моменты развития. Тем не менее различие между направлениями *A* и *B*, проходящее через всю область математики, обнаружится здесь еще яснее, чем в приведенном выше сопоставлении, при котором мы ограничивались областью анализа.

Если начнем с древних греков, то мы найдем резкое разграничение чистой и прикладной математики, которое восходит к Платону и Аристотелю. К чистой математике относится прежде всего известное евклидово построение геометрии, к прикладной принадлежат в особенности числовые операции, так называемая логистика (λόγος—всеобщее число; ср. стр. 47). При этом к последней относились довольно презрительно,— предрассудок, который во многих случаях сохранился до сих пор, но, во всяком случае, большей частью только у людей, которые сами не умеют вычислять. Этому положению логистики могло содействовать отчасти то обстоятельство, что она развивалась в тесной связи с тригонометрией и с потребностями практического землемерия, которое с древних времен казалось людям недостаточно благородным занятием. Конечно, она снова была несколько реабилитирована тем, что без нее не могла обойтись другая наука, которая хотя и родственна геодезии, но в противоположность ей всегда считалась одной из самых благородных, — астрономия. Эта греческая манера научной работы с ее строгим размежеванием отдельных областей, каждая из которых излагалась затем в виде как бы застывшего логического построения, принадлежит, конечно, целиком ряду эволюции *A*. Тем не менее грекам не были чужды и рассуждения в духе *B*; они, повидимому, служили им для эвристических целей и для первого сообщения их открытий; однако для окончательного изложения форма *A* казалась им незаменимой. Это видно из недавно открытого манускрипта Архимеда [1], в котором последний сообщает вычисления объемов тел в вполне современной живой форме.

Наряду с греками в истории математики в древности особенное значение имеют индусы как творцы современной системы счисления, и позднее арабы, передавшие ее нам; у последних встречаются также начатки буквенного счисления. Ясно, что эти успехи принадлежат алгорифмическому ряду эволюций *C*.

Переходя к новому времени, мы можем прежде всего отметить около 1500 г. начало возрождения математического творчества, которое принесло с собой целый ряд замечательных открытий. Для примера я назову формальное разрешение кубического уравнения (формула Кардана), которое находится в „Ars magna“ Кардана (Cardano), появившейся в Нюренберге в 1545 г.; это в высшей степени ценное произведение содержит вообще зародыши современной алгебры, выходящие за пределы схемы античной математики. Конечно, это не составляет собственной заслуги Кардана, так как он, повидимому, не сам открыл свою знаменитую формулу, но заимствовал ее, как и многое другое, у иностранных авторов.

Начиная с 1550 г., на первый план выступают тригонометрические вычисления; появляются первые большие тригонометрические таблицы, вызванные потребностями астрономии, относительно которой я ограничусь одним только именем Коперника. Начиная приблизительно с 1600 г., непосредственно к этому примыкает развитие логарифмов; первые логарифмические таблицы, составленные шотландцем Непером (Napier или Neper) в 1614 г., содержат только логарифмы тригонометрических функций. Таким образом мы видим, что в эти 100 лет развитие математики в точности следовало схеме *A*.

Теперь мы приходим к новейшему времени — к дальнейшему течению XVII в. Здесь на первый план выступает исключительно направление *B*. В 1637 г. появляется аналитическая геометрия Декарта, которая устанавливает связь между числом и пространством, играющую основную роль во всем последующем развитии математики; это произведение легко достать в новом издании [2]. В связи

[1] Heiberg und Zeuthen, Eine neue Schrift des Archimedes, Leipzig 1907. Имеется в русском переводе: Гейберг, Новое сочинение Архимеда. Под редакцией и с предисловием приват-доцента И. Ю. Тимченко, Одесса, „Mathesis“.

[2] R. Descartes, La Géométrie. Nouv. éd. Paris 1886. Это сочинение в непродолжительном времени появится в русском переводе.

с этим тотчас выступают две великие проблемы XVII в.: *проблема касательных и проблема квадратуры, т. е. проблемы диференцирования и интегрирования*. Для развития диференциального и интегрального исчисления в собственном смысле недостает еще только одного факта: еще не знают, что обе проблемы находятся в очень тесной связи, что одна представляет обращение другой; в уяснении этого заключалось, повидимому, ядро того громадного прогресса, который осуществился в конце столетия.

Но еще раньше, в том же столетии, возникает учение о бесконечных рядах, в особенности о степенных рядах, и притом не как самостоятельная дисциплина в смысле современного алгебраического анализа, но в теснейшей связи с проблемой квадрирования. Меркатор (латинская переделка немецкого имени „Кремер": Krämer—торговец), в особенности известный как творец меркаторской проекции, первый проложил здесь путь; ему принадлежит смелая идея—для разложения в ряд $\ln(1+x)$ выполнить деление в дроби $\frac{1}{1+x}$ и проинтегрировать по частям получившийся ряд:

$$\ln(1+x)=\int_0^x \frac{dx}{1+x}=\int_0^x (1-x+x^2-x^3+\ldots)\,dx=$$

$$=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$$

Это в точности соответствует ходу его мыслей, хотя он, конечно, пользуется не нашими простыми знаками $\int$, dx и т. д., но более тяжелым языком. После 1660 г. этим процессом стал пользоваться Ньютон, который построил ряд для выражения бинома с любым показателем. Конечно, им руководили при этом только заключения по аналогии с известными ему простейшими случаями; он не владел строгим доказательством и не знал границ приложимости этого разложения, — в этом снова обнаруживается алгорифм, т. е. момент *C*. Применяя этот ряд к выражению $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, он получает по способу Меркатора ряд для $\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x$. С помощью очень искусного обращения этого ряда, а также ряда для функции $\ln x$, он получает ряды для $\sin x$ и e^x. В заключение этой цепи открытий следует назвать, наконец, Тейлора (Taylor), нашедшего в 1714 г. свой общий принцип для разложения функций в степенные ряды.

Возникновением исчисления бесконечно малых в собственном смысле в конце XVII в. мы обязаны, как известно, Лейбницу и Ньютону. У Ньютона основной идеей является *представление о течении*; обе переменные x, y рассматриваются как функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ времени t; между тем как течет время, „текут" непрерывно и эти функции. Соответственно этому переменная называется у Ньютона fluens, а то что мы называем производной, он обозначает, как „*флюксию*" $\dot{x}$, $\dot{y}$. Мы видим, как тут *все сплошь основано на наглядном представлении*.

То же относится и к изложению Лейбница, первая работа которого появилась в 1684 г. Он сам называет своим главнейшим открытием *принцип непрерывности во всяком процессе природы*, т. е. положение: „Natura non facit saltum". На этом представлении процессов природы он основывает свои математические построения, — опять-таки черта типичная для системы *B*. С другой стороны, у Лейбница большую роль играет *влияние алгорифма* (*C*); от него ведут начало столь ценные, с точки зрения алгорифма, обозначения dx и $\int f(x)\,dx$.

В целом результат этого обзора заключается в том, что *великие открытия XVII в. по существу целиком принадлежат эволюционному ряду B*.

В XVIII в. этот период открытий продолжается сперва *в том же направлении*; в качестве наиболее блестящих имен приходится назвать Эйлера (Euler) и Лагранжа (Lagrange). В эту эпоху развивается, говоря кратко, *учение о диференциальных уравнениях в самом общем смысле, включая вариационное исчисление, а также вырастает здание аналитической геометрии и аналитической механики*; всюду мы здесь видим живое движение вперед. Это напоминает

эпоху в истории географии после открытия Америки, когда новые страны исследовали и объезжали вдоль и поперек. Но совершенно подобно тому, как там еще долго не было и речи о точных измерениях, так что в первое время имели совершенно ложные представления даже об общем положении новой части света (ведь думал же вначале Колумб, что открыл восточный берег Азии), — так и здесь, во вновь завоеванных странах новой математической части света, анализа бесконечномалых, в первое время были довольно далеки от надежной логической постановки. Даже по вопросу об их отношениях к старым, хорошо известным дисциплинам впадали подчас в заблуждения, считая исчисление бесконечно малых чем-то мистическим, не допускающим точного логического анализа. До чего шатко было основание, на котором первоначально стояли творцы нового анализа, стало вполне ясным лишь тогда, когда понадобилось новые отрасли математики изложить в доступном виде в руководствах; тогда сразу обнаружилось, что направление *B*, до сих пор единственно господствовавшее, здесь уже бессильно, и Эйлер первый оставил его. Хотя в нем самом исчисление бесконечно малых и не вызывало никаких сомнений, но для начинающих оно, по мнению Эйлера, представляло слишком много трудностей и сомнений. Исходя из этих дидактических соображений, он счел нужным предпослать ему в виде отдельного курса под названием „Введение в анализ бесконечномалых" (Introductio in analysin infinitorum", 1748) ту дисциплину, которую мы теперь называем алгебраическим анализом. К этому курсу Эйлер относит в особенности учение о бесконечных рядах и других бесконечных процессах, которое служит ему потом фундаментом при построении исчисления бесконечно малых.

Гораздо более радикальный путь прокладывает почти 50 лет спустя Лагранж в своей „Теории аналитических функций" (Lagrange, Théorie des fonctions analytiques. 1797). Свои сомнения относительно современного ему обоснования исчисления бесконечно малых он находит возможным устранить лишь тем, что он отказывается от него как от общей дисциплины, понимая под ним просто собрание формальных правил, относящихся к известным специаль-

ным функциям; а именно, он рассматривает исключительно такие функции, которые даны в виде степенных рядов:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots,$$

и такие именно функции он и называет аналитическими, т. е. такими, которые встречаются в анализе и с которыми последний действительно может что-либо предпринять. Производная такой функции $f(x)$ определяется вполне формально с помощью второго такого же степенного ряда, как мы это еще увидим впоследствии, и взаимная связь между такими рядами и составляет предмет диференциального и интегрального исчислений. Такое самоограничение чисто формальными построениями, конечно, устраняло для того времени целый ряд затруднений.

Вы видите, что эта деятельность Эйлера и Лагранжа целиком принадлежит направлению *A*, заменяя наглядно-генетическое развитие строго замкнутым в себе самом кругом мыслей. Оба эти сочинения имели огромное влияние на школьное преподавание; если в настоящее время в средней школе изучают бесконечные ряды или решают уравнения разложением по степеням по так называемому способу неопределенных коэфициентов, но отказываются включить в ее программу диференциальное и интегральное исчисления в собственном смысле слова, то это значит, что наша школа вполне еще находится под влиянием Эйлера и Лагранжа.

Наиболее существенным для начала XIX в., к которому мы теперь переходим, является строгое обоснование высшего анализа посредством признаков сходимости, о которых раньше не заботились. В XVIII в. в этом отношении царит еще райское состояние, в котором не различают добра и зла, сходящегося и расходящегося ряда; даже в „Introductio" Эйлера мирно уживаются рядом сходящиеся и расходящиеся ряды. Но в начале нового столетия Гаусс (Gauss) и Абель (Abel) публикуют первые точные исследования о сходимости, а в 20-х годах Коши (Cauchy) развивает в своих лекциях и сочинениях первое точное обоснование исчисления бесконечно малых в современном духе. Он не только дает точное определение производной и интеграла как пределов конечных отношений и сумм, как это уже делали иногда

и до него, но впервые строит на нем последовательную систему преподавания анализа, выдвигая на первый план теорему о среднем значении. Впоследствии мы еще остановимся на этом подробнее. Эти теории принадлежат, конечно, направлению *A*, так как они систематично логически разрабатывают известную область, изолированно от других областей. Между тем эти теории не оказали никакого влияния на нашу школу, хотя они были вполне способны разрушить старые предрассудки против диференциального и интегрального исчисления.

Из дальнейшего развития математики в XIX в. я отмечу лишь очень немногое. Прежде всего я назову некоторые успехи, принадлежащие направлению *B*: возникают новая геометрия, математическая физика и теория функций комплексного переменного по Коши и Риману. Вождями при возникновении этих трех обширных областей были сперва французы. Здесь уместно будет сказать несколько слов о стиле математического изложения. У Евклида вы все найдете расчлененным по схеме: „предположение, утверждение, доказательство", к которой он еще присоединяет „определение" (отграничение области, внутри которой действительны рассуждения); в широких кругах вы можете встретить мнение, по которому вся математика всегда движется по такой схеме в четыре такта. А между тем, как раз в тот период, о котором мы сейчас говорим, у французов стала вырабатываться новая художественная форма математического изложения, которую можно называть искусно расчлененной дедукцией. Сочинения Монжа или, чтобы назвать более новую книгу, „Курс анализа" Пикара (Picard, Traité d'analyse) читаются совсем, как хорошо написанный увлекательный роман. Это стиль, свойственный манере *B*, тогда как евклидово изложение вполне родственно манере *A*.

Из немцев, сделавших великие завоевания в названных областях, я назову еще Якоби и Римана и присоединю сюда же из новейшего времени Клебша и норвежца Ли. Все они существенно принадлежат направлению *B*, но только по временам у них замечается алгорифмическая тенденция.

С Вейерштрассом снова сильнее выступает на первый план метод мышления *A*, начиная с 1860 г., когда он стал читать свои лекции в Берлине. Теорию функций Вейерштрасса я уже приводил под литерой *A*. В равной степени принадлежат типу *A* новейшие исследования об аксиомах геометрии; здесь мы имеем исследования совсем в духе Евклида, которые и по изложению снова приближаются к указанному выше типу.

Этим мы закончим наш краткий исторический обзор; в качестве его результата мы можем сказать, что за целые столетия истории математики оба наши главнейшие направления развития появляются равномерно и что каждое из них и часто как раз их смена приводили к великим успехам науки. Таким образом математика только тогда сможет равномерно развиваться по всем направлениям, когда ни один из видов исследования не будет оставлен в пренебрежении. Пусть каждый математик работает в том направлении, к которому лежит его сердце.

Но школьное преподавание, к сожалению, находится, как я уже отмечал, уже с давних пор под односторонним господством направления *A*. Всякое движение в пользу реформы математического образования должно поэтому ратовать за более сильное выделение направления *B*. При этом я считаю необходимым прежде всего провести в преподавании генетический метод, более настойчиво подчеркивать наглядные пространственные представления и, в особенности, выдвинуть на первый план понятие о функции, сливая при этом представления о пространстве и числе. Этой же цели должны служить и настоящие лекции, тем более, что в тех книгах по элементарной математике, к которым мы вообще всегда обращаемся за советом, каковы книги Вебера и Вельштейна, Тропфке, Симона, почти исключительно представлено направление *A*; на этот контраст я указывал уже во введении к этому курсу.

На этом мы заканчиваем историческое отступление и обратимся к следующему большому разделу курса.

АЛГЕБРА.

ВВЕДЕНИЕ.

Я начну с того, что назову вам несколько учебников по алгебре, чтобы немного ориентировать вас среди существующей весьма обширной литературы. Прежде всего я упомяну о „Cours d'algèbre" Серре (Serret)[1], который раньше и у нас был в большом ходу и имеет за собой крупные заслуги. Но теперь у нас пользуются распространением два больших немецких учебника: „Lehrbuch der Algebra" Г. Вебера (H. Weber. 2. Aufl.. Braunschweig 1898/1899) и „Vorlesungen über Algebra" Е. Нетто (E. Netto, Leipzig 1896/1900), каждый в двух томах; оба содержат чрезвычайно много трудных вещей и вообще предназначены, главным образом, для дальнейшего специального изучения алгебры[2]; для обычных потребностей кандидатов на должность учителя они кажутся мне слишком обширными и, во всяком случае, слишком дорогими. В большей степени отвечают таким требованиям и легко читаются „Лекции по алгебре" Бауера[3], которые почти не выходят за пределы того, что должен знать учитель. С практической стороны, в смысле численного решения уравнений, может служить дополнением к этим лекциям небольшая книжка нашего профессора Рунге „Практика уравнений"[4], которую я могу только настойчиво вам рекомендовать[5].

[1] A. Серре, Курс высшей алгебры.

[2] К этим сочинениям примыкают более краткие руководства тех же авторов: 1) E. Netto, Elementare Algebra, akademische Vorlesungen für Studierende der ersten Semester 2-e Aufl., Leipzig 1913; 2) H. Weber, Lehrbuch der Algebra, kleine Ausgabe in einem Bande 2 er Abdruk., Braunschweig 1921.

[3] G. Bauer, Vorlesungen über Algebra Leipzig, 1903.

[4] C. Runge, Praxis der Gleichungen,. Sammlung Schubert XIV, Leipzig 1900.

[5] К этому нужно присоединить еще очень интересное новое английское сочинение Burnside.

Обращаясь теперь к нашей теме, я должен предупредить вас, что по самому характеру этих лекций я, конечно, не могу дать здесь систематического изложения алгебры; я могу лишь дать отдельные выдержки, так что будет наиболее целесообразным, если я выделю такие вещи, которые несправедливо опускаются другими авторами и которые в то же время способны представить в особенном освещении школьное обучение. Все мое изложение будет группироваться вокруг одного пункта, а именно вокруг применения графических и вообще геометрически наглядных методов к решению уравнений. Это составляет содержание крайне обширной и богатой различными соотношениями главы, из которой я, конечно, опять-таки могу выхватить только ряд наиболее важных и интересных вещей; мы будем при этом вступать в органическую связь с различнейшими областями, занимаясь, таким образом, математикой в смысле нашего эволюционного ряда *B*.

I. ВЕЩЕСТВЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ С ВЕЩЕСТВЕННЫМИ НЕИЗВЕСТНЫМИ.

Мы ограничимся сначала уравнениями с вещественными коэфициентами и вещественными значениями неизвестных. Комплексными величинами мы займемся позже. Начнем с очень простого частного случая, который поддается геометрической обработке.

1. Уравнения, содержащие один параметр.

Это уравнения такого типа:

$$f(x, \lambda) = 0.$$

Мы получим наиболее простое геометрическое толкование их, если заменим λ второй переменной y и станем рассматривать

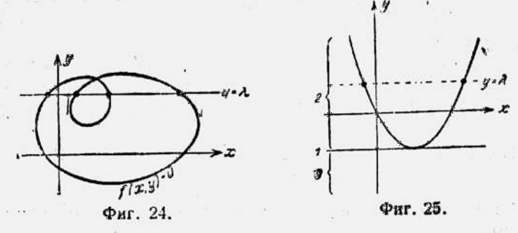
$$f(x, y) = 0$$

как уравнение кривой в плоскости xy-ов (фиг. 24). Точки пересечения этой кривой с параллелью $y = \lambda$ к оси абсцисс дают вещественные корни уравнения $f(x, \lambda) = 0$. Если приближенно начертить эту кривую, — что при не слишком сложных функциях f нетрудно, — то, перемещая параллель,

легко можно видеть, как при изменении λ изменяется число вещественных корней. Особенно пригоден этот прием, когда f есть линейная функция от λ, т. е. для исследования уравнений вида:

$$\varphi(x) - \lambda \cdot \psi(x) = 0;$$

действительно, в этом случае уравнение $y = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ дает рациональную кривую, и ее поэтому легко построить. В этих случаях указанный метод может быть с пользой применен и для действительного вычисления корней.



Фиг. 24. Фиг. 25.

Рассмотрим в качестве примера квадратное уравнение

$$x^2 + ax - \lambda = 0.$$

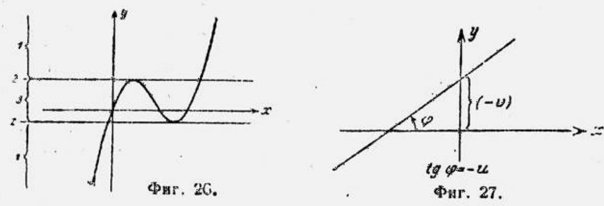
Кривая $y = x^2 + ax$ представляет параболу (фиг. 25), так что сразу видно, для каких значений λ число вещественных корней уравнения равно 2, 1, 0, соответственно горизонталям, пересекающим параболу в 2, 1, 0 точках. Выполнение таких простых и наглядных построений кажется мне весьма полезным и для высших классов школы. В качестве второго примера возьмем кубическое уравнение $x^3 + ax^2 + bx - \lambda = 0$, которое дает нам кубическую параболу $y = x^3 + ax^2 + bx$. Смотря по значению коэфициентов a, b, эта парабола имеет различный вид. На фиг. 26 принято, что уравнение $x^2 + ax + b = 0$ имеет вещественные корни; тогда видно, как параллели разделяются на такие, которые встречают параболу в одной точке, и на такие, которые встречают ее в трех вещественных точках, тогда как в двух предельных положениях имеем по одному двойному корню.

2. Уравнения с двумя параметрами.

Здесь графическая постановка проблемы требует больше искусства, но зато и результаты оказываются более значительными и более интересными. Ограничимся тем случаем, когда оба параметра λ, μ входят линейно; неизвестную уравнения обозначим через t; тогда уравнение, вещественные корни которого требуется определить, будет иметь вид:

$$\varphi(t) + \lambda \cdot \chi(t) + \mu \cdot \psi(t) = 0, \tag{1}$$

где φ, χ, ψ обозначают некоторые многочлены относительно t.



Фиг. 26. Фиг. 27.

Если x, y обозначают обыкновенные прямоугольные координаты точки на плоскости, то всякая прямая в этой плоскости изобразится уравнением:

$$y + ux + v = 0, \tag{2}$$

и мы можем назвать u, v координатами прямой: $(-u)$ есть тангенс угла, образуемого прямой с осью x ов, $(-v)$ выражает отрезок, отсекаемый прямою на оси y-ов (фиг. 27). Если считать точку и прямую и соответственно координаты точки и прямой равноправными понятиями, то этот взгляд окажется особенно важным в дальнейшем. Мы можем сказать, что уравнение

$$y + ux + v = 0$$

означает соединенное положение прямой (u, v) и точки (x, y) т. е. что точка лежит на прямой, а прямая проходит через точку [1]).

[1]) В настоящее время такое соединенное положение называют инцидентностью. *Ред.*

Чтобы истолковать геометрически наше уравнение (1), приведем его к виду (2), чего можно достигнуть двумя существенно различными способами:

А. Полагаем:

$$y = \frac{\varphi(t)}{\psi(t)}, \quad x = \frac{\chi(t)}{\psi(t)}, \tag{3a}$$

$$u = \lambda, \quad v = \mu. \tag{3b}$$

Уравнения (3а) изображают при переменном t вполне определенную рациональную кривую в плоскости xy, так называемую „определяющую кривую" (Normkurve) уравнения (1); всякая ее точка соответствует определенному значению t, так что на ней можно нанести шкалу значений t. На основании соотношений (3а) можно непосредственно вычислить сколько угодно точек кривой и построить таким образом достаточно точно определяющую кривую с помощью ее шкалы. Для каждой определенной пары параметров λ, μ уравнения (3b) изображают некоторую прямую в плоскости; тогда уравнение (1), согласно сказанному, выражает, что точка t определяющей кривой лежит на этой прямой. Рассматривая все действительные пересечения определяющей кривой с этой прямой и отсчитывая значения параметра в них по шкале кривой, можно получить все вещественные корни уравнения (1).

Для лучшего уяснения послужит нам квадратное уравнение:

$$t^2 + \lambda t + \mu = 0.$$

Определяющая кривая представляет в этом случае параболу

$$y = t^2, \quad x = t \quad \text{или} \quad y = x^2,$$

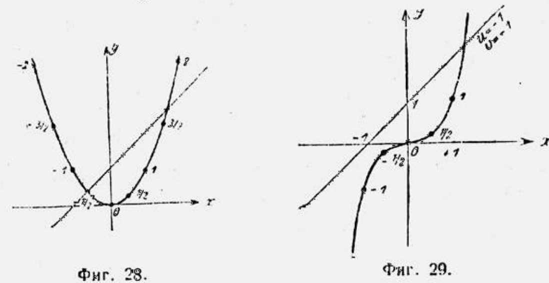
ибзораженную на фиг. 28 с намеченной шкалой, по которой сразу можно прочесть вещественные корни нашего уравнения как пересечения параболы с прямой $y + \lambda x + \mu = 0$. Так, фиг. 28 показывает, что корни уравнения $t^2 - t - 1 = 0$ лежат между $^3/_2$ и 2 и между $-^1/_2$ и -1. Существенное отличие от предыдущего метода заключается в том, что здесь мы рассматриваем все прямые плоскости, тогда как раньше мы брали только горизонтали. Зато теперь мы можем, пользуясь одной и той же раз начерченной параболой, приближенно решить все возможные квадратные уравнения. Последний метод оказывается действительно пригодным для практических целей, если только не требуется значительной точности.

Аналогично можно трактовать все кубические уравнения, которые, как известно, посредством линейного преобразования приводятся к так называемой „приведенной форме":

$$t^3 + \lambda t + \mu = 0;$$

определяющей кривой здесь служит кубическая парабола (фиг. 29):

$$y = t^3, \quad x = t \quad \text{или} \quad y = x^3.$$



Фиг. 28.

Фиг. 29.

И этот метод представляется мне вполне уместным в школе; ученики находят, несомненно, громадное удовольствие в самостоятельном вычерчивании подобных кривых.

В. Второй метод толкования уравнения (1) получается из первого, если применить п р и н ц и п д в о й с т в е н н о с т и, т. е., если обменять местами координаты точки и координаты прямой. Для этого перепишем уравнение (2) в обратном порядке:

$$v + xu + y = 0$$

и приведем уравнение (1) к этому виду, полагая:

$$v = \frac{\varphi(t)}{\psi(t)}, \quad u = \frac{\chi(t)}{\psi(t)}, \tag{4a}$$

$$x = \lambda, \quad y = \mu. \tag{4b}$$

Уравнения (4а) представляют, при переменном t, семейство прямых, огибающих некоторую определенную кривую, „определяющую кривую" уравнения (1) в этом новом его истолковании; это — рациональная кривая определенного класса, так как она выражается в координатах прямой посредством рациональных функций одного параметра. Каждая касательная и вместе с нею ее точка касания получаются при определенном значении t, так что мы снова получаем некоторую шкалу на определяющей кривой. Нанося на чертеж достаточно много касательных на основании уравнений (4а), можно получить кривую и шкалу с любой степенью точности. При определенных значениях λ, μ уравнение (1) говорит, что касательная t к определяющей кривой (4а) проходит через точку (λ, μ), выражаемую уравнениями (4b); таким образом можно получить все вещественные корни уравнения (1), если определить те значения параметра t, которые принадлежат всем касательным к определяющей кривой, проходящим через точку $x = \lambda$, $y = \mu$.

Для лучшего уяснения рассмотрим снова те же примеры. Для квадратного уравнения

$$t^2 + \lambda t + \mu = 0$$

определяющей кривой является огибающая прямых

$$v = t^2, \quad u = t;$$

это — парабола с вершиной в начале координат (фиг. 30). Чертеж дает сразу вещественные корни, соответствующие данной паре значений λ, μ в виде параметров (t) касательных к параболе из точки (λ, μ).

Для кубического уравнения

$$t^3 + \lambda t + \mu = 0$$

определяющая кривая $v = t^3$, $u = t$ есть кривая третьего класса, имеющая точку заострения в начале координат (фиг. 31).

Этот метод можно представить еще в несколько другом виде. Если рассматривать только так называемое трехчленное уравнение:

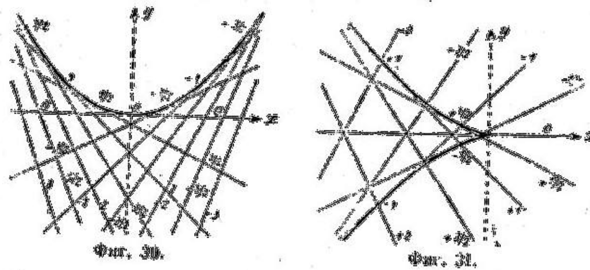
$$t^m + \lambda t^n + \mu = 0,$$

то система касательных определяющей кривой будет представлена уравнением, содержащим параметр t:

$$f(t) = t^m + x t^n + y = 0.$$

Чтобы получить уравнение определяющей кривой в точечных координатах, надо, как известно, исключить параметр t из этого уравнения и из уравнения, получаемого из него диференцированием по t [1]:

$$f'(t) = m t^{m-1} + n x t^{n-1} = 0;$$



Фиг. 30.

Фиг. 31.

действительно, определяющая кривая есть огибающая семейства прямых, содержащая точки пересечения каждых двух следующих друг за другом прямых (t и $t + dt$). Вместо того чтобы исключать t, выразим из обоих уравнений x, y через t:

$$x = -\frac{m}{n} t^{m-n}, \quad y = \frac{m-n}{n} t^m; \qquad (7a)$$

это есть уравнение определяющей кривой в координатах точки.

Для определяющих кривых квадратного и кубического уравнения, взятых нами для примера, получаем по этому способу:

$$x = -2t, \quad y = t^2,$$
$$x = -3t^2, \quad y = 2t^3;$$

[1]) Ибо определяющая кривая есть не что иное, как огибающая семейства кривых, выражаемых уравнением $f(t) = 0$ в координатах x, y при параметре t. *Ред.*

эти уравнения действительно выражают кривые на фиг. 30 и 31.

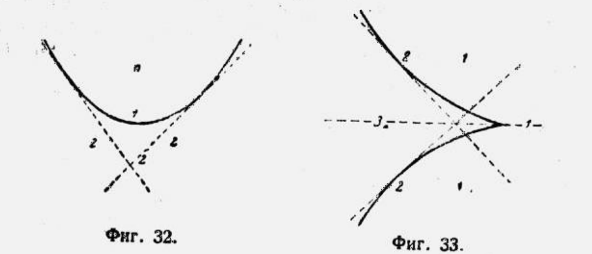
Замечу, что этот прием проводится на практике профессором Рунге (Runge) в его лекциях и упражнениях, и что он оказывается особенно целесообразным для действительного решения уравнений. И в школе можно рекомендовать использовать при случае тот или другой из этих чертежей.

Если сравнить между собой оба рассмотренных нами способа, то окажется, что по отношению к одной определенной, но весьма важной цели второй способ имеет существенное преимущество, а именно: в тех случаях, когда хотят получить наглядное представление о совокупности всех тех уравнений определенного типа, которые имеют данное число вещественных корней.

Такие совокупности уравнений изображаются при первом способе системами прямых, а при втором — областями точек; последние формы совокупностей, в силу некоторой особенности наших геометрических представлений или же в силу привычки, нам существенно легче наглядно себе представить, чем первые.

Теперь я хочу показать на примере квадратного уравнения, чего можно достигнуть в этом направлении; в этом случае через точки, лежащие внутри параболы (фиг. 32), не проходит ни одной касательной к ней, а через каждую точку, взятую вне параболы, проходит по две действительных касательных; таким образом эти области изображают совокупности всех уравнений, имеющих 0 или 2 (вещественных) корня. Через каждую точку на самой параболе проходит только по одной касательной, которая принимается за двойную; таким образом, как здесь, так и вообще, сама определяющая кривая является геометрическим местом точек, для которых два корня уравнения совпадают; вследствие этого ее можно назвать **дискриминантной кривой**.

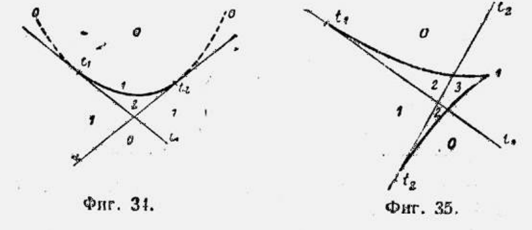
В случае кубического уравнения через каждую точку внутри клина определяющей кривой проходит по три касательных к ней (фиг. 33); действительно, для точек, расположенных на срединной линии, это следует из симметричности фигуры; с другой же стороны, число касательных не может изменяться, если переходить к другим точкам, не пересекая при этом кривой. Когда точка x, y попадает на кривую, то два корня из трех совпадают; когда же эта точка переходит в область, лежащую вне кривой, то эти два корня становятся мнимыми, и остается только один вещественный корень. Наконец, в острие кривой имеем только одну тройную касательную, так что соответствующее уравнение ($t^3 = 0$) имеет только один тройной корень. Чертеж позволяет охватить эту группировку одним взглядом.



Фиг. 32. Фиг. 33.

Фигуры получаются еще интереснее и дают существенно больше, если ввести, — как это часто приходится делать в алгебре, — еще некоторые ограничения для корней: например, если задаться целью **найти все вещественные корни, лежащие в данном промежутке** $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$. Общий ответ на этот вопрос дает, как известно, теорема Штурма (Sturm). Нетрудно так дополнить наши фигуры, чтобы они давали удовлетворительное наглядное решение и этого общего вопроса. Построим для этого попросту касательные к определяющей кривой, соответствующие значениям параметра t_1, t_2, и рассмотрим получающееся разделение плоскости на области. Если применить этот прием прежде всего опять к квадратному уравнению, то вопрос сводится к определению числа касательных, которые проходят через данную точку и касаются параболы в точках ее дуги между t_1 и t_2 (фиг. 34). Через каждую точку треугольника, образуемого этой дугой параболы и обеими „основными" касательными, проведенными через концы дуги t_1, t_2, проходят по две касательные; при переходе через каждую из основных касательных теряется

одна из касательных, ибо она касается параболы вне взятой дуги; через точки серповидных областей, ограниченных параболой и одной из основных касательных, не проходит ни одной прямой, касающейся параболы в точках дуги (t_1, t_2); через внутренние точки параболы вовсе не проходят действительные касательные. Таким образом обе дуги $t \leqslant t_1$ и $t \geqslant t_2$ для получающегося при этом разделения плоскости не имеют существенного значения; остаются только сплошные линии фиг. 34, благодаря которым мы получаем возможность, пользуясь проставленными числами, ясно обозреть совокупность тех квадратных уравнений, которые имеют по 2, 1, 0 вещественных корней между t_1 и t_2.



Фиг. 34. Фиг. 35.

Точно так же поступаем и с кубическим уравнением. Пусть $t_1 > 0$, $t_2 < 0$. Снова проводим основные касательные с этими значениями параметра (фиг. 35); надо рассмотреть только то разделение на области, которое производят эти касательные и заключенная между ними дуга определяющей кривой. В четырехугольной области у острия действительно через каждую точку проходит по три вещественных касательных, касающихся кривой в точках дуги между t_1 и t_2. Если принять во внимание, что при переходе через каждую из основных касательных теряется одна, а при переходе через кривую — две касательные этого рода, что непосредственно видно по чертежу, то получается указанное распределение областей, соответствующих уравнениям с 3, 2, 1, 0 вещественными корнями между t_1 и t_2. Чтобы составить себе представление об огромной пользе графического метода, попробуйте только описать абстрактно это подразделение кубических уравнений,

не апеллируя ни к каким пространственным образам; это потребует у вас несравненно больше времени. Доказательство, которое здесь постигается при одном взгляде на чертеж, тоже окажется тогда далеко не простым.

Что касается отношения этого геометрического метода к известным алгебраическим критериям Штурма, Декарта, Будана-Фурье, то я замечу только, что в настоящем случае геометрический метод охватывает все эти критерии. Более подробный разбор этих интересных соотношений вы найдете в моей работе „Geometriches zur Abzählung der Wurzeln algebraischer Gleichungen“ [1] („Приложение геометрии к подсчету корней алгебраических уравнений“) в „Каталоге математических моделей“ Дика [2]). Я охотно пользуюсь этим случаем, чтобы обратить ваше внимание на упомянутый каталог; последний был издан по поводу выставки, устроенной в Мюнхене в 1893 г. Союзом германских математиков, и по сие время является лучшим пособием для ориентирования в вопросах, касающихся математических моделей.

3. Уравнения с тремя параметрами λ, μ, ν.

Обратимся теперь к рассмотрению четырехчленного уравнения следующего вида:

$$t^p + \lambda t^m + \mu t^n + \nu = 0; \tag{1}$$

применим метод совершенно аналогичный прежнему, с той только разницей, что теперь мы используем не плоскость, а трехмерное пространство. Вместе с тем напишем теперь, наряду с заданным уравнением, то условие геометрии в пространстве, которое выражает, что точка (x, y, z) и плоскость с плоскостными координатами (u, v, w) находятся в „соединенном положении“ (инцидентны, т. е. плоскость содержит точку):

$$z + ux + vy + w = 0, \tag{2}$$

[1]) Воспроизведено в томе II собрания математических сочинений Клейна, стр. 198 – 208.

[2]) W. Dyck, Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente, München 1892, а также добавление (Nachtrag) к нему, München 1893.

или

$$w + xu + yv + z = 0^{1)}, \qquad (3)$$

Это уравнение, написанное в той или другой последовательности его членов, мы будем отождествлять с исходным уравнением (1), и придем тогда, как и раньше, к двум интерпретациям, находящимся между собой в отношении, определяемом принципом двойственности.

Полагаем сперва

$$z = t^p, \quad x = t^m, \quad y = t^n; \qquad (2a)$$

этими уравнениями определяется некоторая кривая в пространстве, „определяющая кривая" четырехчленного уравнения со шкалой значений параметра t. Далее, полагаем:

$$u = \lambda, \quad v = \mu, \quad w = \nu; \qquad (2b)$$

тогда уравнение (1) показывает, что вещественные корни данного уравнения тождественны со значениями параметра для точек пересечения определяющей кривой (2a) с плоскостью (2b) [2]).

Пользуясь принципом двойственности, полагаем:

$$w = t^p, \quad u = t^m, \quad v = t^n; \qquad (3a)$$

эти уравнения определяют однократно бесконечное множество [1]) плоскостей, которые можно рассматривать как соприкасающиеся плоскости некоторой определенной кривой в пространстве, также отнесенной таким образом к параметру t; ввиду такого определения этой кривой в плоскостных координатах, ее можно противопоставить, как определяющую кривую определенного класса прежней кривой определенного порядка. Рассматривая теперь наряду с нею точку

$$x = \lambda, \quad y = \mu, \quad z = \nu, \qquad (3b)$$

находим, что вещественные корни (1) тождественны со значениями параметра t для тех соприкасающихся плоскостей кривой (3a), которые проходят через точку (3b).

Остается на конкретных примерах глубже вникнуть в смысл обеих интерпретаций; для той и для другой мы имеем в нашей коллекции модели, которые я теперь вам покажу.

Фи . 36.

Первой интерпретацией воспользовался проф. Мемке (Mehmke) в Штутгарте при построении аппарата для численного решения уравнений. В этом аппарате (фиг. 36), сделанном из латуни, вы видите три вертикальных столбика со шкалами; в аппарат помещают вырезанную в виде шаблона определяющую кривую четырехчленного уравне-

1) Уравнение вида (2) или (3), как известно, выражает плоскость в декартовых координатах. Каждой системой коэфициентов u, v, w определяется одна плоскость: эти количества и называются координатами плоскости. Если x, y, z суть декартовы координаты некоторой точки, а u, v, w — координаты некоторой плоскости, то уравнение (2) выражает, что точка лежит на плоскости, или что плоскость проходит через точку. Если дать в этом уравнении коэфициентам u, v, w постоянные значения, оставляя x, y, z переменными, то оно выразит в декартовых координатах плоскость (u, v, w), т. е. ему удовлетворяют координаты всех тех точек, которые лежат на этой плоскости. Обратно, если здесь дать постоянное значение коэфициентам x, y, z, то уравнению (2) удовлетворяют координаты u, v, w тех плоскостей, которые проходят через постоянную точку (x, y, z): это есть уравнение точки в плоскостных координатах. Об этой именно двойственности автор и говорит ниже. *Ред.*

2) Если точка x, y, z лежит на плоскости (2b), то координаты ее удовлетворяют уравнению (2), которое теперь принимает вид:

$$z + \lambda x + \mu y + \nu = 0.$$

Если та же точка принадлежит кривой (2a), то последнее уравнение переходит в уравнение (1). *Ред.*

1) Под n-кратно бесконечным множеством или ∞^n понимают такое множество, элементы которого однозначно определяются значениями n параметров $t_1, t_2, \ldots, t_n$, пробегающих все вещественные значения в некоторых интервалах. *Ред.*

ния третьей, четвертой или пятой степени. Но только, в отличие от нашего изложения, принята не обыкновенная прямоугольная система координат, а такая, что координаты плоскости, т. е. коэфициенты u, v, w уравнения плоскости, представленного в виде (2), изображаются как раз теми отрезками, которые соответствующая плоскость отсекает на шкалах трех вертикальных столбов и которые можно отсчитать по ним. Чтобы иметь возможность фиксировать определенную плоскость в пространстве: $u=\lambda$, $v=\mu$, $w=\nu$, к переднему w-столбику приделан визир, который можно установить на любом делении шкалы ν; деления же λ и μ на шкалах столбов u и v соединяют натянутой нитью. Лучи зрения, идущие от визира к точкам этой нити, образуют нашу плоскость; ее пересечения с определяющей кривой можно наблюдать непосредственно как кажущиеся пересечения нити с шаблоном, если смотреть через отверстие в визире[1]); соответствующие значения параметра, которые являются искомыми корнями уравнения, отсчитываем на нанесенной на шаблон шкале значений t для определяющей кривой. Степень практической пригодности описанного апппарата зависит, конечно, существенным образом от тщательности его механического изготовления.

Для иллюстрации второго метода у нас имеется модель, построенная Гартенштейном (Hartenstein) в качестве работы для государственного экзамена. Она построена для так называемого приведенного вида уравнений четвертой степени:

$$t^4+\lambda t^2+\mu t+\nu=0, \tag{4}$$

в каковом виде, как известно, можно непосредственно представить всякое уравнение четвертой степени. Но сперва я изложу второй метод в несколько измененном виде, как я это уже проделал выше для уравнения с двумя параметрами (стр. 138-139[2]).

---

[1]) Точка пересечения плоскости с шаблоном проектируется из отверстия на нить. *Ред.*

[2]) Нитяная модель Гартенштейна выпущена в свет тем временем фирмой Шиллинга (M. Schilling) в Лейпциге (серия XXXIII, № 2, 3); одна модель показывает дискриминантную поверхность, другая изображает, кроме того, еще две ее касательные плоскости; это дает подразделение пространства, соответствующее чертежам на стр. 142. Сравните относящуюся к модели статью R. H a r t e n s t e i n, die Diskriminantenfläche der Gleichung vierten Grades (Leipzig, Schilling, 1909).

Рассмотрим однократно-бесконечную систему плоскостей, плоскостные координаты которых выражены уравнениями (3а), тогда как их уравнения в точечных координатах в настоящем случае напишутся так:

$$f(t)=t^4+xt^2+yt+z=0.$$

Огибающей этих плоскостей является совокупность прямых, по которым каждая из плоскостей $f(t)=0$ пересекается с соседней с нею плоскостью $f(t+dt)=0$; иначе говоря, это есть развертывающаяся поверхность, уравнение которой получается исключением t из уравнений $f(t)=0$ и $f'(t)=0$. Чтобы получить определяющую кривую, надо рассмотреть кривую соприкасания семейства плоскостей, т. е. геометрическое место точек, в которых пересекаются каждые три соседние плоскости; это есть, как известно, ребро возврата развертывающейся поверхности, координаты которого в функции t получаются из трех уравнений: $f(t)=0$, $f'(t)=0$, $f''(t)=0$. В данном случае эти три уравнения напишутся так:

$$t^4+xt^2+yt+z=0,$$
$$4t^3+x\cdot 2t+y=0,$$
$$12t^2+x\cdot 2=0;$$

из них находим:

$$x=-6t^2,\quad y=8t^3,\quad z=-3t^4. \tag{5}$$

Это — у р а в н е н и е в т о ч е ч н ы х к о о р д и н а т а х о п р е д е л я ю щ е й к р и в о й у р а в н е н и я (4), в з я т о й п о к л а с с у; в плоскостных координатах эта же кривая выражается уравнением (см. 3а):

$$w=t^4,\quad u=t^2,\quad v=t. \tag{6}$$

Оба уравнения относительно t четвертой степени; следовательно, определяющая кривая принадлежит как к четвертому классу, так и к четвертому порядку.

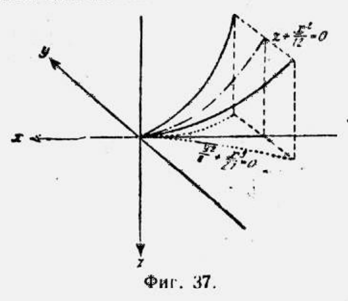
Чтобы ближе познакомиться с этой кривой, рассмотрим несколько простых поверхностей, которые содержат ее. Прежде всего выражения (5) тождественно (относительно t) удовлетворяют уравнению:

$$z+\frac{x^2}{12}=0,$$

т. е. наша кривая лежит на изображаемом этим уравнением параболическом цилиндре второго порядка, производящие которого параллельны оси y-ов. Но, с другой стороны, имеет также место соотношение:

$$\frac{y^2}{8}+\frac{x^3}{27}=0,$$

так что и этот обыкновенный кубический цилиндр с производящими, параллельными оси z-ов, проходит через нашу кривую; она представляет, впрочем, полное пересечение обоих цилиндров, лежащее в конечном удалении На основании этого можно легко составить себе приблизительное представление о ходе определяющей кривой: она представляет собой кривую двоякой кривизны, расположенную симметрично по отношению к плоскости xz и имеющую острие в начале координат (фиг. 37).



Фиг. 37.

Далее, через нашу определяющую кривую проходит еще и следующая поверхность второго порядка:

$$\frac{xz}{6}-\frac{3y^2}{64}=0,$$

так как и это соотношение удовлетворяется выражениями (5) тождественно относительно t. Из уравнений этой поверхности и кубического цилиндра составим еще следующую линейную комбинацию, которая представляет новую поверхность третьего порядка, проходящую через определяющую кривую:

$$\frac{xz}{6}-\frac{y^2}{16}-\frac{x^3}{216}=0.$$

Рассмотрим теперь развертывающуюся поверхность, для которой определяющая кривая представляет ребро возврата и которую мы можем определить поэтому как

совокупность всех касательных к определяющей кривой. Если кривая в пространстве задана уравнениями вида:

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad z=\chi(t),$$

то касательная к ней в точке t выразится уравнениями:

$$x=\varphi(t)+\varrho\varphi'(t),\qquad y=\psi(t)+\varrho\cdot\psi'(t),\qquad z=\chi(t)+\varrho\chi'(t),$$

где ϱ есть параметр; действительно, косинусы направления касательной, как известно, пропорциональны производным координат кривой по t. Если рассматривать и t как переменную, то последние уравнения с двумя параметрами t и ϱ изображают развертывающуюся поверхность, состоящую из касательных; все это хорошо известные соображения из геометрии в пространстве. Для нашей кривой (5) это изображение развертывающейся поверхности имеет следующий вид, если ее координаты, в отличие от координат кривой, обозначить через X, Y, Z:

$$\left.\begin{aligned} X&=-6(t^2+2\varrho t),\\ Y&=8(t^3+3\varrho t^2),\\ Z&=-3(t^4+4\varrho t^3).\end{aligned}\right\}\qquad(7)$$

Это и есть та поверхность, которая воспроизведена на упомянутой модели Гартенштейна, а именно — ее прямые изображены здесь натянутыми нитями. Это изображение поверхности в параметрах дает само по себе наилучшие опорные пункты для исследования и действительного построения ее; мы следуем, собственно говоря, только старой привычке, когда все же спрашиваем, каково самое уравнение поверхности. Это уравнение получится, если исключить t и ϱ из системы (7). Я покажу вам самый простой прием для достижения этой цели, хотя я и не могу здесь входить в подробное объяснение того, что приводит к такому приему и какое значение, по существу, имеют его отдельные шаги. Прием этот состоит в том, что из формул (7) составляют такие комбинации:

$$Z+\frac{X^2}{12}=12\varrho^2t^2,$$

$$\frac{X\cdot Z}{6}-\frac{Y^2}{16}-\frac{X^3}{216}=8\varrho^3t^3,$$

которые на самой кривой ($\varrho=0$) обращаются в нуль, а, будучи приравнены нулю, изображают две из рассмотренных уже выше специальных поверхностей, проходящих через кривую. Из этих двух уравнений легко можно исключить произведение $\varrho \cdot t$, что дает уравнение развертывающейся поверхности:

$$\left(Z+\frac{X^2}{12}\right)^3-27\left(\frac{XZ}{6}-\frac{Y^2}{16}-\frac{X^3}{216}\right)^2=0;$$

следовательно, это поверхность шестого порядка [1]).

Относительно значения этой формулы я сделаю для тех, кто ближе знаком с предметом, следующие замечания: выражения, стоящие в скобках, представляют собой не что иное, как инварианты основного биквадратного уравнения четвертой степени в приведенном виде:

$$t^4+xt^2+yt+z=0;$$

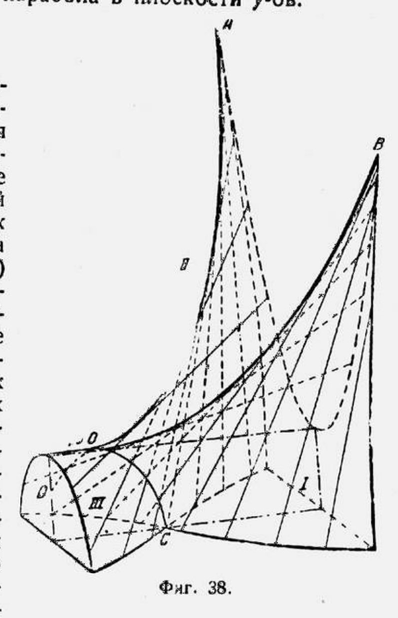
они играют большую роль в теории эллиптических функций, где их обыкновенно обозначают через g_2 и g_3. Левая часть уравнения нашей поверхности $\Delta=g_2{}^3-27g_3{}^2$ является, как известно, дискриминантом уравнения четвертой степени, которое имеет двойной корень, когда дискриминант обращается в нуль. Таким образом наша развертывающаяся поверхность представляет не что иное, как дискриминантную поверхность уравнения четвертой степени, т. е. совокупность всех точек, в которых последнее имеет двойной корень.

После этих теоретических разъяснений построение нитяной модели нашей поверхности не представляет никаких принципиальных затруднений: стоит только на основании параметрического изображения определить те точки, в которых касательные, подлежащие построению, пересекают известные неподвижные плоскости, и затем натянуть нити между этими плоскостями, реализованными посредством деревянной или картонной коробки. Но чтобы такая модель действительно была красива и пригодна, чтобы она давала ясное представление обо всем интересующем нас расположении поверхности и ее ребра возврата, как мы это видим на модели, — для этого необходимы продолжительные опыты и очень большое искусство. Фиг. 38 изображает поверхность с ее прямыми; AOB есть ребро возврата (ср. фиг. 37).

[1]) В действительности это поверхность пятого порядка, так как члены шестой степени выпадают. *Прим. перев.*

Вы замечаете на этой модели двойную кривую (CO), вдоль которой встречаются оба крыла поверхности; это попросту следующая парабола в плоскости y-ов:

$$Y=0, \quad Z-\frac{X^2}{4}=0.$$



Фиг. 38.

Но только одна половина (CO) этой параболы, а именно та, для которой $X<0$, представляет пересечение действительных частей поверхности, тогда как другая (отмеченная на чертеже пунктиром) расположена в пространстве изолированно. Это явление не покажется удивительным тому, кто привык теорию алгебраических поверхностей сопровождать геометрическими представлениями; там нередко случается, что действительные ветви двойных линий то являются пересечением действительных частей поверхности, то оказываются изолированными в пространстве, и тогда их можно рассматривать как действительные пересечения мнимых частей поверхности. Соответствующее явление на плоскости заключается в том, что наряду с обыкновенными двойными точками алгебраических кривых, представляющими пересечения действительных ветвей кривой, встречаются двойные точки, лежащие, повиди-

мому, изолированно и представляющие пересечения мнимых частей кривой; это явление известно всякому.

Рассмотрим подробнее, что может дать нам полученная таким образом поверхность с ее ребром возврата, т. е. определяющей кривой. Представим себе, что на определяющей кривой нанесена ее шкала, или, еще лучше, отнесем каждой построенной касательной соответствующее ей значение параметра t, которое принадлежит и ее точке касания. Если задано уравнение четвертой степени с определенными коэфициентами x, y, z, то стоит лишь через соответствующую точку пространства (x,y,z) провести соприкасающиеся плоскости к определяющей кривой или — что то же самое — касательные плоскости к дискриминантной поверхности, и мы получим вещественные корни в виде параметров точек касания с кривой или самих касательных в этих точках. Так как соприкасающаяся плоскость, касаясь кривой, пересекает ее, то при рассматривании из точки (x,y,z) каждая точка касания соприкасающейся плоскости проектируется в виде кажущейся точки перегиба кривой — и наоборот. Таким образом вещественные корни уравнения четвертой степени являются в результате параметрами кажущихся точек перегиба определяющей кривой, когда мы смотрим на нее из точки (x,y,z).

Правда, для тех, кто не имеет достаточного навыка, конечно, довольно трудно уверенно распознать на модели соприкасающиеся плоскости и кажущиеся точки перегиба. Но с непосредственной очевидностью модель разъясняет следующий, наиболее важный пункт: подразделение всех уравнений четвертой степени по числу их вещественных корней. Посмотрим, какие случаи вообще представляются возможными на основании теоретического исследования уравнения. Если α, β, γ, δ суть четыре корня вещественного уравнения четвертой степени (4), то ввиду отсутствия члена, содержащего t^3, необходимо $\alpha+\beta+\gamma+\delta=0$. Что же касается вещественности корней, то возможны, очевидно, следующие три главных случая:

I. Четыре вещественных корня.

II. Два вещественных, два мнимых сопряженных корня.

III. Ни одного вещественного корня, две пары мнимых сопряженных корней.

Если даны два уравнения типа I с корнями α, β, γ, δ и α', β', γ', δ', то всегда можно α, β, γ, δ обратить в α', β', γ', δ', переходя непрерывно через различные системы из четырех вещественных чисел, сумма которых постоянно равна нулю; параллельно этому первое уравнение обратится во второе, переходя непрерывным образом через уравнения того же типа, т. е. все уравнения I типа образуют сплошной континуум [1]); то же справедливо и для двух других типов.

На нашей модели это обстоятельство должно выразиться тем, что пространство распадается на три сплошные части такого рода, что точки одной и той же части соответствуют уравнениям одного и того же типа. Рассмотрим теперь переходные случаи между этими тремя типами: I тип переходит во II через уравнения, которые имеют два различных вещественных корня и один двойной (равный двум совпадающим) вещественный корень, что мы обозначим символически через $2+(2)$; точно так же между II и III типами имеем переходный случай одного вещественного двойного корня и двух мнимых корней, что будем обозначать через (2). Обоим переходным типам должны отвечать в нашем пространственном образе части самой дискриминантной поверхности, так как она вообще изображает все уравнения с кратными корнями; при этом, рассуждая аналогично предыдущему, найдем, что каждому типу должна отвечать сплошная часть поверхности. Обе эти группы уравнений: $2+(2)$ и (2) в свою очередь переходят одна в другую через уравнения с двумя вещественными двойными корнями, символически: $(2)+(2)$; точки, для которых, таким образом, совпадают две пары корней, необходимо должны принадлежать обоим крыльям дискриминантной поверхности; следовательно, они лежат на неизолированной ветви ее двойной линии. Таким образом дискриминантная поверхность распадается на две части, разделяемые одной ветвью двойной линии; из них одна $2+(2)$ отделяет I область пространства от II, а другая (2) разделяет II и III области. Чтобы усмотреть, как расположена определяющая кривая, заметим, что она представляет

[1]) Под континуумом разумеют всякое множество, имеющее такую же мощность, как и прямолинейный отрезок, плоская фигура или сплошное тело. *Ред.*

собой ребро возврата и потому в ее точках совпадают по три касательные плоскости, образуя соприкасающуюся плоскость; поэтому мы имеем здесь случай одного тройного и одного простого вещественного корня: $1 + (3)$; этот случай может получиться только из случая $2 + (2)$, а именно таким образом, что один из простых корней становится равным двойному корню; следовательно, ребро возврата должно целиком лежать на первой части $2 + (2)$ поверхности. Только в острие ребра возврата ($x = y = z = 0$) мы имеем четырехкратный корень, который может получиться и от совпадения обоих двойных корней $(2) + (2)$. Действительно, острие O ребра возврата лежит одновременно и на двойной линии. Что же касается изолированной ветви двойной линии, то она целиком проходит в области III и характеризуется тем, что для ее точек четыре мнимых корня по два совпадают между собой, образуя два двойных сопряженных мнимых корня.

Все перечисленные возможные случаи в точности реализованы на нашей модели. На чертеже (фиг. 38) часть пространства, заключенная внутри поверхности, справа от двойной линии, образует область I, а слева от той же линии лежит область III; пространство же, лежащее вне поверхности, образует область II. Поэтому, имея в руках следующую схему, вы легко сможете вполне ориентироваться относительно числа вещественных корней:

I (4 вещ. корня). II (2 вещ. корня). III (Ни одного вещ. корня)

Дискримин. поверхность: $2 + (2)$ (2)
Определяющая кривая: $1 + (3)$

Двойная линия: $(2 + (2)$ (2 мнимых двойных корня)

Острие: (4)

II. УРАВНЕНИЯ В ОБЛАСТИ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ.

Мы теперь откажемся от того, чтобы ограничиваться только вещественными величинами и будем оперировать комплексными числами.

Здесь мы снова поставим себе целью выделить такие вещи, которые допускают геометрическую иллюстрацию в большей степени, чем это обыкновенно делают. Я начну с наиболее важной теоремы алгебры.

А. Основная теорема алгебры.

Основная теорема алгебры, как известно, заключается в том, что всякое алгебраическое уравнение n-й степени имеет, вообще говоря, n корней, или, выражаясь точнее, всякий полином $f(x)$ n-й степени может быть разложен на n линейных множителей.

В сущности, все доказательства этой теоремы пользуются геометрической интерпретацией комплексных величин на плоскости xy. Я познакомлю вас с ходом мыслей в первом доказательстве Гаусса (1799), которое можно представить в наглядной форме; изложение его у самого Гаусса имеет, конечно, совершенно другой вид.

Если дан многочлен

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n,$$

то можно написать:

$$f(x + iy) = u(x, y) + i \cdot v(x, y),$$

где u, v представляют некоторые вещественные многочлены от обеих вещественных переменных x, y. Основная мысль гауссова доказательства заключается в следующем: если исследовать кривые:

$$u(x, y) = 0 \quad \text{и} \quad v(x, y) = 0,$$

лежащие в плоскости xy, и показать, что они должны иметь общую точку, то для этой точки (x, y) будет $f(x + iy) = 0$; этим и будет доказано существование, по крайней мере, одного корня уравнения $f = 0$. Оказывается, что для этой цели достаточно исследовать ход обеих кривых в бесконечности, т. е. в сколь угодно большом удалении от начала координат.

Если абсолютная величина r переменной z становится весьма большой, то можно в функции $f(z)$ пренебречь низшими степенями z по сравнению с z^n; это означает, что функция $f(z)$ асимптотически приближается к

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi),$$

где с помощью формулы Муавра введены полярные координаты r, φ на плоскости xy. Из этого результата можно заключить, что u и v асимптотически приближаются к функциям:

$$r^n \cos n\varphi \text{ и } r^n \sin n\varphi;$$

поэтому окончательный ход кривых $u = 0$, $v = 0$ в бесконечности в первом приближении изобразится так:

$$\cos n\varphi = 0, \ \sin n\varphi = 0.$$

Но кривая $\sin n\varphi = 0$ состоит из n прямых, которые проходят через начало и образуют с осью x-ов углы $0, \frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \ldots, \frac{(n-1)\pi}{n}$, а кривая $\cos n\varphi = 0$ состоит из n биссекторов углов между первыми прямыми (см. фиг. 39, соответствующую случаю $n = 3$). В центральной части фигуры действительные кривые $u = 0$, $v = 0$ могут, конечно, существенно уклоняться от этих прямых; но чем дальше от начала, тем больше должны первые приближаться к последним; поэтому ход настоящих кривых можно схематически изобразить тем, что за пределами некоторой достаточно большой окружности (описанной около начала) мы сохраним наши прямые, а внутри нее соединим их между собой произвольным образом (фиг. 40). Но каков бы ни был ход кривых внутри круга, уходящие в бесконечность ветви u, v должны непременно переходить одна в другую при обходе фигуры; из этого наглядно видно, что эти кривые внутри круга должны хоть раз пересечься. Действительно, этот результат можно — и в этом заключается содержание гауссова доказательства — точно вывести из непрерывности кривых[1]). Но по существу ход идей изложен выше.

Фиг. 39.

[1]) К этому нужно прибавить, что Гаусс не обходится без соображений геометрического характера. Полная арифметизация этого доказательства, на которой Гаусс так настаивает в своей диссертации, выполнена впервые А. Островским (A. Ostrowski, „Göttingener Nachrichten" 1920),

Когда получен таким образом один корень, тогда можно отщепить от функции $f(z)$ один линейный сомножитель и повторить доказательство для оставшегося многочлена $(n-1)$-й степени. Продолжая поступать таким образом, мы в конце концов действительно получим расщепление на n линейных сомножителей, чем доказывается существование n корней.

Идея доказательства станет вам яснее, если вы проделаете несколько примеров со всеми построениями. Одним из простейших примеров является следующий:

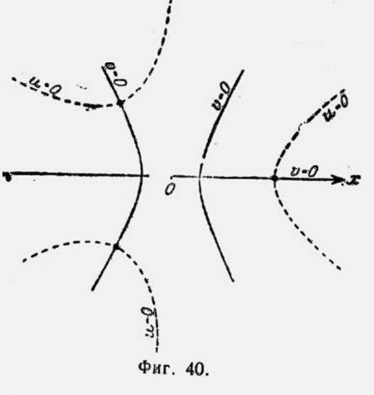
$$f(z) = z^3 - 1 = 0.$$

Здесь, очевидно,

$$u = r^3 \cos 3\varphi - 1,$$

$$v = r^3 \sin 3\varphi,$$

так что кривая $v = 0$ состоит просто из трех прямых, тогда как кривая $u = 0$ имеет три гиперболовидных ветви. На чертеже (фиг. 41) вы, в самом деле, видите три точки пересечения обеих кривых;



Фиг. 40.

эти три точки дают три корня нашего уравнения. Я весьма рекомендую проделать более сложные примеры.

Этими краткими указаниями по поводу основной теоремы я могу здесь ограничиться, так как я не читаю сейчас

этот мемуар помещен также в VIII выпуске „Материалов для научной биографии Гаусса („Materialen für eine wissenschaftliche Biographie von Gauss VIII). Относительно истории основной теоремы алгебры заметим еще, что первое ее доказательство было дано Даламбером (D'Alambert). Правда, в доказательстве Даламбера имеется пункт, на который обратил внимание Гаусс. Именно, Даламбер не обратил внимания на различие между верхней границей и максимумом функции; он опирается поэтому на допущение, в общем случае несправедливое, что функция комплексной переменной, обладающая верхней границей, таковой действительно достигает. *Ред.*

курса алгебры. Замечу еще только, что значение введения в алгебру комплексных чисел в том и заключается, что они дают возможность установить основную теорему алгебры в общей форме, не допускающей никаких исключений; ограничиваясь же вещественными величинами, можно утверждать только то, что уравнение n-й степени имеет либо n корней, либо меньше, либо ни одного.

Фиг. 41.

Время, которое остается у нас для алгебры, мы употребим на то, чтобы исследовать в наглядной форме полные системы решений комплексных уравнений, подобно тому, как мы это сделали выше для вещественных решений вещественных уравнений. Но при этом мы ограничимся только уравнениями с одним комплексным параметром, входящим в уравнение линейно.

B. Уравнение с одним комплексным параметром.

В тех узких условиях, какими мы ограничили задачу, изучение простого конформного отображения даст нам все, что нам нужно.

Обозначим через $z = x + iy$ неизвестную, через $w = u + iv$ параметр; тогда рассматриваемые уравнения будут иметь такой вид:

$$\varphi(z) - w \cdot \psi(z) = 0, \tag{1}$$

где φ, ψ обозначают многочлены относительно z; пусть n есть показатель высшей степени z в φ или ψ. По основной теореме это уравнение для каждого значения w имеет n, вообще различных, корней z. Но из уравнения (1) следует, что, обратно,

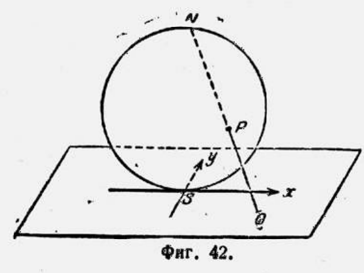
$$w = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}, \tag{2}$$

т. е. что w есть однозначная рациональная функция от z, а именно, как говорят, **рациональная функция степени n**. Если бы мы захотели воспользоваться в качестве геометрического эквивалента уравнения (1) тем конформным отображением комплексных плоскостей z и w, которое устанавливается функциональной зависимостью (2), то наглядность нарушалась бы многозначностью z как функция w. Ввиду этого поступим так, как это всегда делается в теории функций: плоскость w мы представляем себе в виде n наложенных друг на друга экземпляров (листов), которые мы подходящим образом соединяем между собой в так называемых „точках разветвления" в одну n-листную риманову поверхность; этот прием знаком всем вам из элементов учения об алгебраических функциях. Тогда наша функция (2) осуществляет взаимно-однозначное и, вообще говоря, конформное соответствие между точками римановой поверхности на плоскости w, с одной стороны, и точками простой плоскости z, с другой стороны [1]).

Прежде чем перейти к подробному изучению этого соответствия будет целесообразно принять некоторые меры к тому, чтобы устранить ту исключительную, но не лежащую в существе вещей роль, которую играют бесконечно большие значения w и z, и тем сделать возможной такую формулировку теорем, чтобы они не допускали исключений. Ввиду того, что эти условия, к сожалению, указывают далеко не всегда, когда это было бы необходимо сделать, мы остановимся на них несколько подробнее. А именно, мы считаем недостаточным говорить только символически о бесконечно удаленной точке комплексной плоскости, так как это не дает никакого конкретного представления, и только с помощью особых рассуждений и условий можно уяснить себе, что именно следует считать аналогичным определенному свойству конечной точки в том случае, когда точка становится бесконечно удаленной. Но мы будем иметь все, что нам нужно, если раз навсегда заменим гауссову плоскость как представительницу комплексных чисел **римановой сферой**. С этой целью представим себе сферу с диаметром 1, касающуюся плос-

1) См. приложение „О римановых поверхностях".

кости Гаусса в начале координат, и станем стереографически проектировать ее на плоскость из ее северного полюса N, диаметрально противоположного точке касания, или южному полюсу S (фиг. 42). При этом со всякой точкой Q на плоскости однозначно сопрягается точка P на сфере—вторая точка пересечения луча NQ со сферой, и, обратно, со всякой точкой P сферы, кроме точки N, однозначно сопрягается некоторая точка Q на плоскости с определенными координатами x, y; поэтому можно рассматривать точку P как представителя числа $x+iy$. Когда же точка P приближается по какому-либо пути к северному полюсу N, то точка Q уходит в бесконечность, и наоборот. Поэтому представляется естественным рассматривать точку N, с которой не сопряжено ни одно конечное комплексное число, как единственного представителя всех бесконечно больших чисел $x+iy$, т. е. как конкретный образ до сих пор лишь символически введенной бесконечно удаленной точки числовой плоскости, и приписать ей символ [1]). Этим достигается в геометрическом образе полная равноправность как всех конечных, так и бесконечно удаленной точки.



Фиг. 42.

Теперь, чтобы вернуться к геометрическому толкованию нашего алгебраического соотношения (1), заменим также плоскость w сферой w. Тогда наша функция представит отображение сферы z на сфере w; это есть изображение конформное так же, как и соответствие обеих плоскостей, по той причине, что по известной теореме стереографическая проекция конформно отображает плоскость на сфере и обратно. При этом одной точке на сфере w отвечают вообще n различных точек на сфере z. Чтобы получить **взаимно-однозначное** соответствие, представим себе снова n экземпляров сферы w, наложенных или вложенных один в другой, и скрепим их в точках разветвления в одну n-листную риманову поверхность на сфере w. Составить себе такое представление не труднее, чем уяснить себе понятие о римановой поверхности на плоскости. Этим достигается в конце концов геометрическое толкование алгебраического уравнения (1), как взаимно-однозначного, вообще конформного, сопряжения римановой поверхности на сфере w, с одной стороны, и простой сферы z, с другой стороны; в эту интерпретацию включены, очевидно, и бесконечные значения z и w, которые сопряжены или друг с другом или с конечными значениями этих переменных.

[1]) В оригинале „Marke". *Ред.*

Чтобы получить возможность вполне использовать эти новые геометрические средства, необходимо и в алгебре сделать соответствующий шаг, направленный к тому, чтобы устранить в формулах исключительный характер бесконечно большого; этот шаг заключается в **введении однородных переменных**, а именно, мы полагаем $z=\frac{z_1}{z_2}$ и рассматриваем z_1 и z_2 как две независимые комплексные переменные, но такого рода, что z_1/z_2 и $c\cdot z_1/c\cdot z_2$ при любом c изображают одну и ту же точку. Пусть z_1, z_2 принимают все возможные пары конечных значений, но только не обращаются одновременно в нуль, тогда, согласно сделанному условию, для каждого конечного значения z мы получим одну определенную точку; но, кроме того, существует еще одна точка (z_1 произвольно, $z_2=0$), соответствующая бесконечно возрастающим z. Таким образом получаем арифметический эквивалент бесконечно удаленной точки. Точно так же, разумеется, полагаем $w=\frac{w_1}{w_2}$ и пишем следующее „однородное" уравнение между „однородными" переменными z_1, z_2 и w_1, w_2, соответствующее уравнению (2):

$$\frac{w_1}{w_2}=\frac{z_2^n\cdot\varphi\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}{z_2^n\cdot\psi\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\varphi(z_1,z_2)}{\psi(z_1,z_2)}. \qquad (3)$$

Здесь $\varphi(z_1,z_2)$, $\psi(z_1,z_2)$ означают целые рациональные

функции от z_1 и z_2, так как $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ содержат $z = \frac{z_1}{z_2}$, самое большее, в n-й степени; кроме того, это однородные многочлены (формы) измерения n, ибо каждый член z^i, входящий в $\varphi(z)$ или $\psi(z)$, при умножении обоих членов дроби $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ на z_2^n обращается в

$$z_2^n \cdot \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^i = z_2^{n-i}\, z_1^i,$$

т. е. в член n-го измерения.

Теперь нам предстоит, последовательно применяя оба введенных вспомогательных средства — изображение на комплексной сфере и однородные координаты, изучить во всех подробностях ту функциональную зависимость между z и w, которую устанавливает уравнение (1). Эта задача будет решена, если мы сумеем составить себе полное представление о конформном соответствии между сферой z и римановой поверхностью на сфере w.

Но здесь прежде всего возникает вопрос о характере и положении точек разветвления на поверхности Римана. Я напомню, что μ-кратной точкой разветвления называется такая точка, в которой сходится $\mu + 1$ листов. Так как w является однозначной функцией z, то положение точек разветвления будет нам известно, если мы будем знать соответствующие им точки на сфере z; я обыкновенно называю их просто замечательными точками сферы z. Им тоже соответствует известная кратность, равная кратности сопряженных с ними точек разветвления. Я приведу без подробного доказательства теоремы, разрешающие эту задачу. При этом я предполагаю, что эти, собственно говоря, довольно простые факты из области теории функций в общем вам знакомы, хотя, быть может, и не в той однородной координации, которой я здесь отдаю предпочтение. Абстрактные вещи, о которых я сейчас буду говорить, получат позже в ряде примеров конкретную наглядную форму.

Начнем с небольшого вычисления, которое даст нам аналог производной $\frac{dw}{dz}$ в однородных координатах. Продиференцируем уравнения (3):

$$\frac{w_2\, dw_1 - w_1 dw_2}{w_2^2} = \frac{\psi\, d\varphi - \varphi\, d\psi}{\psi^2}. \tag{3'}$$

Но

$$d\varphi = \varphi_1\, dz_1 + \varphi_2\, dz_2,$$
$$d\psi = \psi_1\, dz_1 + \psi_2\, dz_2,$$

где

$$\varphi_1 = \frac{\partial\varphi(z_1, z_2)}{\partial z_1}, \quad \varphi_2 = \frac{\partial\varphi(z_1, z_2)}{\partial z_2},$$
$$\psi_1 = \frac{\partial\psi(z_1, z_2)}{\partial z_1}, \quad \psi_2 = \frac{\partial\psi(z_1, z_2)}{\partial z_2}.$$

С другой стороны, по теореме Эйлера об однородных функциях степени n, имеем:

$$\varphi_1 \cdot z_1 + \varphi_2 \cdot z_2 = n\varphi,$$
$$\psi_1 \cdot z_1 + \psi_2 \cdot z_2 = n\psi.$$

Поэтому числитель в правой части равенства (3′) можно преобразовать следующим образом:

$$\psi\, d\varphi - \varphi\, d\psi = \begin{vmatrix} d\varphi & d\psi \\ \varphi & \psi \end{vmatrix} = \frac{1}{n^2}\begin{vmatrix} \varphi_1\, dz_1 + \varphi_2\, dz_2, & \psi_1\, dz_1 + \psi_2\, dz_2 \\ \varphi_1 z_1 + \varphi_2\, z_2, & \psi_1\, z_1 + \psi_2 z_2 \end{vmatrix},$$

что по теореме о перемножении определителей равняется:

$$\frac{1}{n^2}\begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \psi_1 & \psi_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} dz_1 & dz_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Поэтому соотношение (3′) принимает такой вид:

$$\frac{w_2\, dw_1 - w_1\, dw_2}{w_2^2} = \frac{z_2\, dz_1 - z_1\, dz_2}{n^2 \cdot \psi^2} \cdot (\varphi_1 \psi_2 - \varphi_2 \psi_1).$$

Это — основная формула в однородной теории нашего уравнения; в качестве определяющего выражения для всего последующего является функциональный определитель $\varphi_1 \psi_2 - \varphi_2 \psi_1$ форм φ и ψ. Кроме этого множителя, справа входит диференциал от $z = \frac{z_1}{z_2}$, а слева диференциал от $w = \frac{w_1}{w_2}$, а так как для конечных значений

переменных z и w замечательные точки получаются, как известно, из уравнения $\frac{dw}{dz} = 0$, то становится ясной следующая теорема, строгого доказательства которой я не могу здесь излагать: *каждый μ-кратный корень функционального определителя является замечательной точкой, μ-й кратности; другими словами, ей соответствует μ-кратная точка разветвления римановой поверхности на сфере w.* Главное преимущество этого правила, по сравнению с прежними, заключается в том, что оно в общей формулировке охватывает конечные и бесконечные значения z и w. Оно же дает точное указание относительно числа замечательных точек. Действительно, четыре производные, входящие в функциональный определитель, представляют собою формы $(n-1)$-го измерения; поэтому сам определитель есть форма $(2n-2)$-го измерения. А такой многочлен всегда имеет как раз $2n-2$ корня, если принимать во внимание кратность последних. Если поэтому $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$, обозначают замечательные точки сферы z (т. е. если $\varphi_1 \psi_2 - \psi_1 \varphi_2 = 0$ для $z_1 : z_2 = a_1, \ldots, a_\nu$), а $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\nu$, суть их кратности, то сумма последних

$$\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_\nu = 2n - 2.$$

Этим точкам отвечают, в силу конформного отображения, ν точек разветвления: $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$ римановой поверхности на сфере w; они расположены на поверхности изолированно, и в них в круговом порядке сходятся соответственно $\mu_1 + 1, \mu_2 + 1, \ldots, \mu_\nu + 1$ листов. Но следует заметить, что несколько различных таких точек разветвления могут лежать над одной и той же точкой на сфере w, так как из соотношения $w = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ для $z = a_1, \ldots, a_\nu$, может получиться несколько раз одно и тоже значение w. Над такой точкой окажется тогда несколько различных друг от друга изолированных групп листов, таких, что листы каждой группы в этой точке склеены между собой. Такие точки на сфере w мы будем (в отличие от точек разветвления на сфере z) называть местами разветвления и будем обозначать их через $A, B, C, \ldots$; число таких различных мест разветвления может, таким образом, быть меньше ν.

Теперь мы построим поверхность Римана, о которой по имеющимся пока у нас данным мы можем иметь лишь весьма расплывчатые представления, таким образом, чтобы она получила более наглядный вид. С этой целью проведем на сфере w через места разветвления $A, B, C, \ldots$ замкнутую линию $\mathfrak{C}$ без кратных точек возможно простого вида; заштрихуем одну из ограниченных ею частей сферы в отличие от другой (фиг. 43). Во всех примерах, разбираемых нами ниже, все точки A B, $C, \ldots$ действительны; в этом случае естественно взять за линию $\mathfrak{C}$ меридиан вещественных чисел, так что наша сфера распадается на две полусферы.

Фиг. 43.

Возвращаясь к общему случаю, заметим, что каждый лист римановой поверхности перекрещивается с другим листом, связанным с ним вдоль разреза или линии разветвления, соединяющей две точки разветвления Как известно, риманова поверхность, по существу, остается неизменной, когда мы такую линию как-либо по ней перемещаем, если при этом концы ее остаются неподвижными, другими словами, если те же листы скреплять между собой вдоль иных линий, соединяющих те же точки. В этой неизменяемости заключается большая общность, но в то же время и большая трудность идеи поверхностей Римана. Чтобы придать нашей поверхности определенный вид, легко допускающий конкретное представление, сдвинем все линии разветвления таким образом, чтобы все они лежали над построенной выше линией $\mathfrak{C}$, проходящей через все точки разветвления; при этом над одними частями линии $\mathfrak{C}$ может, конечно, лежать по несколько линий разветвления, а над другими частями линии $\mathfrak{C}$ может их вовсе не быть.

Теперь разрежем все листы вдоль этой линии $\mathfrak{C}$. Ввиду того, что мы уже раньше поместили все линии разветвления над линией $\mathfrak{C}$ и теперь производим вдоль всех их разрезы, наша риманова поверхность распадается на две группы по n „полулистов“, совершенно свободных от разветвлений и расположенных над каждой из двух

частей сферы, ограниченных линией $\mathfrak{C}$. Соответственно тому, как мы условились выше различать обе части сферы, мы будем говорить о n заштрихованных и о n незаштрихованных полулистах. Теперь мы можем так описать строение первоначальной римановой поверхности: каждый заштрихованный полулист был на ней окружен исключительно незаштрихованными полулистами, с которыми он встречался вдоль линий, расположенных над частями AB, $BC, \ldots$ линии $\mathfrak{C}$; аналогично этому, каждый незаштрихованный полулист был окружен вдоль таких отрезков кривой одними лишь заштрихованными полулистами. Но более чем два полулиста встречаются только в точках разветвления, а именно, в μ-кратной точке разветвления сходятся попеременно как раз $\mu+1$ заштрихованных и $\mu+1$ незаштрихованных полулистов.

Ввиду того, что посредством нашей функции $w(z)$ сфера z взаимно-однозначно сопряжена с римановой поверхностью на сфере w, то возможно сразу перенести на первую найденные соотношения связности: в силу непрерывности, $2n$ полулистам поверхности соответствуют $2n$ взаимно-связанных областей z, которые мы назовем соответственно заштрихованными и незаштрихованными полуобластями; они отделяются одна от другой n кривыми, в виде которых n-значная функция $z(w)$ изображает на сфере z каждую из частей $AB, BC, \ldots$ линии $\mathfrak{C}$. Каждая заштрихованная полуобласть соприкасается вдоль таких кривых исключительно с незаштрихованными полуобластями, и наоборот; только в μ-кратной замечательной точке сходятся больше чем две полуобласти, а именно $\mu+1$ заштрихованных и столько же незаштрихованных.

Это подразделение сферы z на области послужит нам к тому, чтобы проследить во всех деталях ход функции $z(w)$ для некоторых простых и характерных примеров. Начнем с самого простого примера.

1. Двучленное уравнение.

$$z^n = w. \tag{1}$$

Как известно, формальное решение этого уравнения получают, вводя знак корня или радикал: $z=\sqrt[n]{w}$; но от этого мы не много выигрываем в смысле знания функциональной зависимости, связывающей z и w. Поэтому станем поступать согласно нашему общему приему: вводим однородные переменные:

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{z_1^n}{z_2^n}$$

и составляем функциональный определитель числителя и знаменателя правой части:

$$\begin{vmatrix} nz_1^{n-1} & 0 \\ 0 & nz_2^{n-1} \end{vmatrix} = n^2 z_1^{n-1} z_2^{n-1}.$$

Для этого определителя $z_1=0$ и $z_2=0$ — или, в неоднородной форме, $z=0$ и $z=\infty$ — представляют корни $(n-1)$-й кратности; следовательно, известны все замечательные точки с общей кратностью $2n-2$. Но согласно нашей общей теореме в соответственных, в силу зависимости $w=z^n$, местах $w=0$ и $w=\infty$ лежат единственные точки разветвления поверхности Римана на сфере w, и притом кратность той и другой равна $n-1$, так что в каждой из них сходятся циклически все n листов. Отметим линией $\mathfrak{C}$ меридиан вещественных чисел на сфере w и разрежем все листы римановой поверхности вдоль этого меридиана, сдвинув предварительно линии разветвления соответственным образом. Из $2n$ полусфер, на которые распадается при этом поверхность, представим себе заштрихованными те, которые расположены над задней половиной сферы w и которые, следовательно, соответствуют значениям w с положительной чисто мнимой частью. На меридиане различаем полумеридиан положительных вещественных чисел (сплошная линия на фиг. 44) и полумеридиан отрицательных чисел (пунктир).

Теперь исследуем изображения этой меридианальной линии $\mathfrak{C}$ на сфере z-ов, производящие характеристическое

деление последней на полуобласти. Вдоль положительного полумеридиана $w = r$, причем r пробегает ряд значений от 0 до ∞. Поэтому, на основании известной формулы из теории комплексных чисел, находим:

$$z = \sqrt[n]{w} = \left|\sqrt[n]{r}\right| \cdot \left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right),$$

где

$$k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Эти значения z заполняют для различных k те полумеридианы сферы z, которые составляют с полумеридианом положительных вещественных чисел углы

$$0, \frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n}, \ldots, \frac{2(n-1)\pi}{n}.$$

Таким образом эти линии соответствуют той половине $\mathfrak{C}$, которая изображена сплошной линией. Аналогично этому на отрицательном полумеридиане сферы w надо положить $w = -r = r \cdot e^{i\pi}$, где снова $0 \leqslant r \leqslant \infty$; это дает

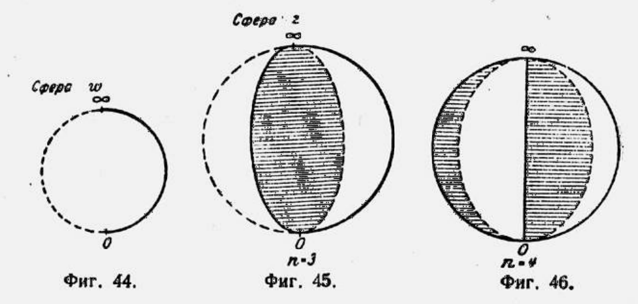
$$z = \sqrt[n]{w} = \left|\sqrt[n]{r}\right| \cdot \left(\cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}\right),$$

где $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Эти значения заполняют n полумеридианов шара z с „географическими долготами"

$$\frac{\pi}{n}, \frac{3\pi}{n}, \ldots, \frac{(2n-1)\pi}{n},$$

которые, таким образом, делят пополам углы между предыдущими полумеридианами. Таким образом сфера z распадается на $2n$ равных двусторонников с вершинами в северном и южном полюсе — подобно тому, как надрезают апельсин. Это подразделение в точности соответствует общей теории; в частности, только в замечательных точках — в обоих полюсах — встречаются более чем по две полуобласти, а именно по $2n$, что соответствует кратности $n-1$. Что же касается распределения заштрихованных и незаштрихованных полуобластей, то необходимо определить относительно одной какой-нибудь полуобласти, следует ли ее заштриховать или нет; тогда остальные полуобласти придется заштриховать через одну. Если

смотреть на заштрихованную половину сферы w (т. е. на заднее полушарие), то видим, что сплошная часть ее периферии лежит влево от нас, а пунктирная вправо. А так как мы имеем дело с конформным отображением без переворачивания углов (или „прямым" конформным отображением), то и каждая заштрихованная полуобласть на сфере z должна быть так расположена, что сплошная часть ограничивающей ее линии и лежит слева, а пунктирная часть справа. Это дает нам полное знание распределения полуобластей на сфере z. Следует обратить внимание на характерное различие в распределении областей на обеих половинах сферы z, в зависимости от того, есть ли n четное или нечетное число, как это видно на фиг. 45 и 46 для случаев $n = 3$ и $n = 4$.



Фиг. 44. Фиг. 45. Фиг. 46.

Хочу обратить ваше внимание и на то, насколько действительно необходимо перейти к комплексной **сфере** для полного понимания положения вещей; в случае комплексной **плоскости** мы получили бы подразделение ее на прямолинейно ограниченные секторы, с вершинами в начале координат, и представлялось бы далеко не таким наглядным то обстоятельство, что $z = \infty$ как замечательная точка, и $w = \infty$ как точка разветвления имеют то же значение, что и точки $z = 0$ и $w = 0$.

Теперь мы имеем основу для полного выяснения функциональной связи между z и w; остается только изучить конформное отображение каждого из $2n$ сферических двусторонников на ту или другую полусферу w. Но я не

стану здесь входить в рассмотрение этого вопроса; всякому, кому вообще приходилось иметь дело с конформным отображением, этот случай знаком как один из простейших и в высшей степени наглядных примеров. К способам численного определения z нам еще придется вернуться ниже.

Теперь же займемся важным вопросом о взаимном соотношении между отдельными однородными полуобластями на сфере z. Точнее говоря: $w = z^n$ принимает одно и то же значение в соответственных точках всех n заштрихованных областей; не выражаются ли отвечающие этим точкам значения z простым образом друг через друга? Действительно, мы сразу видим, что для $z' = z \cdot \varepsilon$, где ε обозначает какой-нибудь из корней n-й степени из единицы, всегда $z'^n = z^n$, т. е. $w = z^n$ принимает одно и то же значение во всех n точках:

$$z' = \varepsilon^{\nu} \cdot z = e^{\frac{2\nu i\pi}{n}} \cdot z \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1). \qquad (2)$$

Поэтому эти n точек распределены как раз между всеми n заштрихованными областями и пробегают по каждой из них, когда z движется по одной какой-нибудь; то же имеет место и для незаштрихованных областей. Но каждая подстановка вида (2) обозначает геометрически в р а щ е н и е с ф е р ы z о к о л о в е р т и к а л ь н о й о с и $(0, \infty)$ н а у г о л $\nu \cdot \frac{2\pi}{n}$, так как в комплексной плоскости, как известно, умножение на $e^{\frac{2\nu i\pi}{n}}$ изображает вращение около начала на угол $\frac{2\nu\pi}{n}$. Таким образом соответственные точки наших сферических областей, как и самые области, переходят друг в друга при n таких вращениях около вертикальной оси.

Поэтому, если бы мы заранее могли определить хоть одну заштрихованную область сферы, то это замечание дало бы нам и остальные однородные области. При этом применяется только то свойство подстановок (2), что они преобразовывают уравнение (1) само в себя (т. е. уравнение $z^n = w$ превращают в $z'^n = w$) и что число их совпадает со

степенью уравнения. В дальнейших примерах мы всегда будем иметь возможность заранее указать такие линейные подстановки и постоянно будем пользоваться тем существенным упрощением, которое благодаря этому вносится в разрешение вопроса о подразделении на области.

Теперь мы воспользуемся нашим примером для выяснения одного важного понятия весьма общего характера, а именно, понятия н е п р и в о д и м о с т и в приложении к уравнениям, которые рационально содержат один параметр w. О неприводимости уравнений с рациональными числовыми коэфициентами мы уже говорили по поводу построения правильного семиугольника. Уравнение $f(z, w) = 0$ (например наше уравнение: $z^n - w = 0$), в котором $f(z, w)$ представляет многочлен, целый относительно z, и коэфициенты которого являются рациональными функциями от w, называется п р и в о д и м ы м по отношению к параметру w, если f разлагается на произведение двух многочленов того же рода:

$$f(z, w) = f_1(z, w) \cdot f_2(z, w);$$

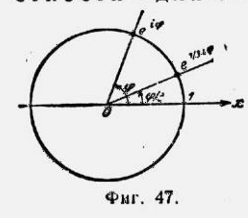
в противном случае уравнение называется н е п р и в о д и м ы м относительно w. Все обобщение, по сравнению с прежним понятием сводится к тому, что под „областью рациональности", в которой мы оперируем и к которой должны принадлежать все коэфициенты рассматриваемых многочленов, вместо совокупности всех рациональных чисел теперь мы понимаем совокупность всех рациональных функций одного параметра w; мы переходим, таким образом, от точки зрения чистой теории чисел к точке зрения теории функций.

Изображая наглядно всякое уравнение $f(z, w) = 0$ посредством его римановой поверхности, можно установить простой критерий приводимости в этом новом смысле. В самом деле, если уравнение приводимо, то всякая пара значений (z, w), удовлетворяющая ему, должна обращать в нуль либо $f_1(z, w)$, либо $f_2(z, w)$. Но решения уравнений $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ изображаются их римановыми поверхностями, которые не имеют между собой ничего общего и, в частности, нигде не скреплены. Следовательно, р и м а н о в а п о в е р х н о с т ь, п р и н а д л е ж а щ а я п р и в о д и м о м у у р а в н е н и ю $f(z, w) = 0$ д о л ж н а р а с п а д а т ь-

ся, по крайней мере, на две совершенно раздельные части.

Поэтому мы можем теперь сразу же утверждать, что уравнение $z^n - w = 0$ неприводимо в понимании теории функций. В самом деле, в каждой точке разветвления ее римановой поверхности, которая нам в точности известна, циклически связаны между собой все n листов, и, кроме того, вся поверхность отображается на сплошной сфере z; поэтому о распадении на части не может быть и речи.

В виде приложения мы можем теперь заняться разрешением одной уже раньше затронутой популярной математической проблемы, а именно — задачи о разделении любого угла φ на n равных частей, в частности — для $n=3$ — задачи о трисекции угла. Задача состоит в том, чтобы найти точное построение с помощью циркуля и линейки, которое давало бы деление любого угла φ на три равные части. Для целого ряда специальных значений угла φ легко можно найти такие построения. Я хочу познакомить вас с ходом мыслей в доказательстве невозможности трисекции угла в указанном смысле; при этом я прошу вас вспомнить доказательство невозможности построения правильного семиугольника с помощью циркуля и линейки. Как и в том доказательстве, мы сведем задачу к неприводимому кубическому уравнению и затем покажем, что его невозможно решить посредством одних только извлечений квадратного корня. Но только теперь в уравнение будет входить параметр — угол φ, — тогда как раньше коэфициенты были целыми числами: соответственно этому, теперь вместо числовой должна оказаться функциональная неприводимость.



Фиг. 47.

Чтобы получить уравнение нашей проблемы, представим себе, что при положительной полуоси вещественных чисел построен угол φ (фиг. 47); тогда его вторая сторона пересечет окружность радиуса 1 в точке

$$w = e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Наша задача сводится к тому, чтобы найти такое независимое от величины угла φ построение, состоящее из конечного числа операций с циркулем и линейкой, которое всякий раз давало бы точку пересечения этой окружности со стороной угла $\frac{\varphi}{3}$, т. е. точку

$$z = e^{\frac{i\varphi}{3}} = \cos\frac{\varphi}{3} + i\sin\frac{\varphi}{3}.$$

Это значение z удовлетворяет уравнению:

$$z^3 = \cos\varphi + i\sin\varphi, \tag{3}$$

и аналитический эквивалент нашей геометрической задачи состоит в том, чтобы решить это уравнение посредством конечного числа последовательно извлекаемых один из другого квадратных корней из рациональных функций от $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$, ибо это суть координаты точки w, из которых мы должны исходить при нашем построении.

Прежде всего надо убедиться в том, что уравнение (3) неприводимо с точки зрения теории функций. Правда, это уравнение не вполне подходит под тот тип уравнений, который мы имели в виду в предыдущих общих рассуждениях: вместо рационально входящего комплексного параметра w здесь рационально входят две функции — косинус и синус — вещественного параметра φ. Будет естественным развитием нашего понятия, если мы назовем здесь многочлен $z^3 - (\cos\varphi + i\sin\varphi)$ приводимым при том условии, что он распадается на многочлены относительно z, коэфициенты которых тоже являются рациональными функциями от $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$. Можно дать критерий понимаемой в этом смысле приводимости, вполне подобный прежнему. А именно, если φ в равенстве (3) пробегает все вещественные значения, то $w = e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ обегает в то же время окружность радиуса 1 в плоскости w, которой в силу стереографической проекции соответствует экватор на сфере w. Линия, лежащая над этой сферой на римановой поверхности уравнения $z^3 = w$ и одновременно пробегающая все три листа, уравнением (3) взаимно-однозначно отображается на окружности радиуса 1 сферы z-ов и поэтому может быть, до некоторой

степени, названа его „одномерным римановым изображением". Ясно, что подобным образом можно для всякого уравнения вида $f(z, \cos\varphi, \sin\varphi) = 0$ построить такое риманово изображение; для этого нужно взять столько экземпляров окружностей с радиусом 1 и с длиной дуги φ, сколько корней имеет уравнение, и скрепить их соответственно связности корней. Далее заключаем, совершенно подобно прежнему, что уравнение (3) только тогда могло бы быть приводимым, если бы его одномерное риманово изображение распадалось на отдельные части; но в данном случае это не имеет места, и потому неприводимость нашего уравнения (3) доказана.

Прежнее доказательство того, что всякое кубическое уравнение с рациональными численными коэфициентами, разрешимое посредством ряда извлечений квадратного корня, является приводимым, может быть буквально перенесено на настоящий случай неприводимого в функциональном смысле уравнения (3)[1]; стоит только вместо слов „рациональные числа" говорить каждый раз „рациональные функции от $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$". После этого является вполне доказанным наше утверждение о том, что невозможно выполнить посредством конечного числа операций с циркулем и линейкой деления на три части произвольного угла φ; таким образом все старания людей, занимающихся трисекцией угла, обречены на вечную бесплодность!

Теперь перейдем к рассмотрению несколько более сложного примера.

2. Уравнение диэдра.

Так называют следующее уравнение:

$$w = \frac{1}{2}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right); \qquad (1)$$

основание же для такого названия будет выяснено ниже. Умножая на z^n, находим что степень этого уравнения равна $2n$. Вводя однородные переменные, получаем:

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{z_1^{2n} + z_2^{2n}}{2z_1^n \cdot z_2^n};$$

[1]) См. часть I этих лекций (Арифметика).

здесь действительно числитель и знаменатель представляют формы измерения $2n$. Их функциональный определитель равен:

$$\begin{vmatrix} 2n \cdot z_1^{2n-1}, & 2n \cdot z_2^{2n-1} \\ 2nz_1^{n-1}z_2^n, & 2nz_1^n z_2^{n-1} \end{vmatrix} = 4n^2 z_1^{n-1} z_2^{n-1}(z_1^{2n} - z_2^{2n}).$$

Прежде всего, он имеет корни $z_1 = 0$ и $z_2 = 0$, каждый $(n-1)$-й кратности; остальные $2n$ корней получаются из уравнения:

$$z_1^{2n} - z_2^{2n} = 0, \text{ или } \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n = \pm 1.$$

Если ввести наряду с корнем n-й степени из единицы

$$\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{n}},$$

которым мы пользовались уже выше, еще и следующий n-й корень из -1:

$$\varepsilon' = e^{\frac{i\pi}{n}},$$

то остальные $2n$ корней будут:

$$\frac{z_1}{z_2} = \varepsilon^\nu \quad \text{и} \quad \frac{z_1}{z_2} = \varepsilon' \cdot \varepsilon^\nu \quad (\nu = 0, 1, \ldots n-1),$$

так что соответствующие значения $z = \frac{z_1}{z_2}$ имеют каждое модуль 1 и поэтому расположены на экваторе z (соответствующем окружности радиуса 1 на плоскости z), а именно на одинаковых угловых расстояниях $\frac{\pi}{n}$ одно от другого. Итак, мы находим следующие замечательные точки на сфере z: южный полюс $z = 0$ и северный полюс $z = \infty$, каждый с кратностью $n-1$; $2n$ точек на экваторе $z = \varepsilon^\nu$, $\varepsilon' \cdot \varepsilon^\nu$, каждая с кратностью 1.

Сумма всех кратностей равна $2 \cdot (n-1) + 2n \cdot 1 = 4n - 2$, как того требует общая теорема (стр. 164) при степени $2n$. В силу уравнения (1) замечательным точкам $z = 0, \infty$ на сфере w отвечает точка $w = \infty$, всем точкам $z = \varepsilon^\nu$ — точка $w = +1$ и, наконец, всем точкам $z = \varepsilon' \cdot \varepsilon^\nu$ — точка $w = -1$. Поэтому на шаре w имеется только три места разветвления: $\infty, +1, -1$, но зато расположены над

$w=\infty$ ...2 точки разветвления кратности $n-1$,
$w=+1$...n точек разветвления кратности 1,
$w=-1$...n точек разветвления кратности 1.

Таким образом из $2n$ листов поверхности Римана в точке $w=\infty$ циклически сходятся обе группы по n листов, а в каждой из точек $w=+1$ и $w=-1$ n раз по два листа. Детали расположения этих листов представятся нагляднее, если мы изучим соответствующее подразделение сферы z на полуобласти.

Для этого полезно знать, как замечено выше, те линейные постановки, которые превращают уравнение (1) само в себя. Прежде всего оно остается неизменным, подобно двучленному уравнению, при n подстановках:

$$z'=\varepsilon^{\nu}\cdot z \quad (\nu=0,1,2,\ldots,n-1), \quad \text{где } \varepsilon=e^{\frac{2i\pi}{n}} \tag{2a}$$

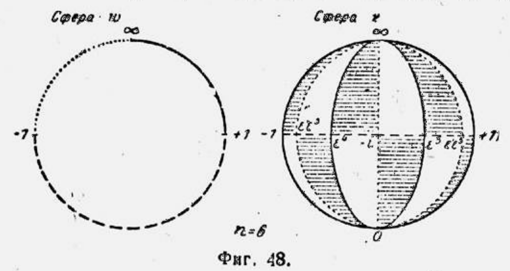
так как при них $z'^n=z^n$. Точно так же оно переходит само в себя при следующих n подстановках:

$$z'=\frac{\varepsilon^{\nu}}{z}\,(\nu=0,1,\ldots,n-1), \tag{2b}$$

так как они только обменивают местами z^n и $\frac{1}{z^n}$. Итого, мы имеем $2n$ линейных преобразования уравнения (1) самого в себя, т. е. как раз столько, сколько единиц в степени уравнения. Поэтому, зная при некотором значении w один корен z_0 уравнения, можно сразу получить все $2n$ корней: $\varepsilon^{\nu}\cdot z_0$ и $\frac{\varepsilon^{\nu}}{z_0}\,(\nu=0,1,\ldots,n-1)$, если только известен корень n й степени из единицы.

Теперь перейдем к исследованию того подразделения сферы z которое соответствует разрезанию римановой поверхности на сфере w вдоль вещественного меридиана; при этом мы будем различать на вещественном меридиане сферы w, как и в предыдущем примере, отрезки, определяемые тремя точками разветвления, а именно: от $+1$ до ∞ (сплошная линия), от ∞ до -1 (пунктир из точек), от -1 до $+1$ (пунктир из черточек) фиг. 48). Каждому из этих трех отрезков на сфере z отвечают по $2n$ различных криволинейных отрезков, которые все получаются из одного из них с помощью $2n$ линейных

подстановок (2); поэтому достаточно определить каждый раз положение одного из них. С другой стороны, все эти отрезки должны соединять замечательные точки $z=0$, ∞, ε^{ν}, $\varepsilon'\cdot\varepsilon^{\nu}$, которые мы прежде всего отмечаем на сфере z; аналогично предыдущему случаю, изображение этих отрезков несколько различается в зависимости от того, есть ли n четное или нечетное число. Для нас достаточно будет наглядно представить себе один какой-нибудь определенный случай, например $n=6$. Фиг. 48 изобра-



Фиг. 48.

жает в прямоугольной проекции переднюю сторону сферы z; на ней видны из точек ε^n, лежащих на экваторе на расстоянии в 60° друг от друга, начиная слева, точки $\varepsilon^3=-1$, ε^4, ε^5, $\varepsilon^6=1$, а из точек $\varepsilon'\cdot\varepsilon^{\nu}$, расположенных посредине между первыми, видны точки $\varepsilon'\cdot\varepsilon^3$, $\varepsilon'\cdot\varepsilon^4=-i$, $\varepsilon'\cdot\varepsilon^5$.

Я утверждаю что квадрант $(+1,\infty)$ вещественного меридиана z соответствует сплошной части $+1<w<+\infty$ меридиана w. Действительно, если положить $z=r$ и давать r вещественные значения от 1 до ∞, то $w=\frac{1}{2}\left(z^n+\frac{1}{z^n}\right)=\frac{1}{2}\left(r^n+\frac{1}{r^n}\right)$ будет принимать также возрастающие вещественные значения от 1 до ∞. Из этой кривой получаются n других сплошных кривых на сфере z с помощью n линейных подстановок (2a), которые, как мы знаем из первого примера, изображают вращение сферы около вертикальной оси $(0,\infty)$ на углы $\frac{2\pi}{n}$, $\frac{4\pi}{n}$, ..., $\frac{2(n-1)\pi}{n}$; таким образом

мы получаем n четвертей меридиана, соединяющих северный полюс ∞ с точками ε^{ν} экватора. Еще одну сплошную кривую мы получим, применяя, например, подстановку $z' = \frac{1}{z}$, которая превращает квадрант меридиана от $+1$ до ∞ в нижний вещественный квадрант меридиана, соединяющий точки $+1$ и 0. Если подвергнуть и эту кривую всем вращениям (2a), — соединение этих вращений с $z' = \frac{1}{z}$ действительно дает все подстановки (2b), — то получим еще n четвертей меридиана, соединяющих южный полюс с точками экватора ε^{ν}, так что мы действительно получаем $2n$ искомых сплошных кривых, соответствующих сплошной четверти меридиана w. При $n=6$ эти кривые составляют три полных меридиана, которые получаются из вещественного меридиана вращением на 0, 60, 120°.

Теперь мы можем убедиться в том, что совокупность значений $z = \varepsilon' \cdot r$, где r снова пробегает ряд вещественных значений от $+1$ до ∞, соответствует части вещественного меридиана w, изображенной точечным пунктиром; в самом деле, уравнение (1) дает при этих значениях:

$$w = \frac{1}{2}\left(\varepsilon'^{n} r^{n} + \frac{1}{\varepsilon'^{n} r^{n}}\right) = -\frac{1}{2}\left(r^{n} + \frac{1}{r^{n}}\right),$$

следовательно, w постоянно убывает от -1 до $-\infty$. Но $z = \varepsilon' \cdot r$ представляет четверть меридиана от ∞ до точки ε' на экваторе; применяя к ней снова подстановки (2a) и (2b), находим, аналогично предыдущему, что части вещественного меридиана w, отмеченной точечным пунктиром, соответствуют все четверти меридиана, соединяющие полюсы с точками экватора $\varepsilon' \cdot \varepsilon^{\nu}$, так что эти меридианы делят пополам углы между меридианами, которыми мы пользовались выше.

Остается найти $2n$ криволинейных отрезков, соответствующих полумеридиану $-1 < w < +1$, отмеченному пунктиром из черточек; я докажу, что это суть как раз *отрезки, определяемые на экваторе сферы* z *точками* ε^{ν} и $\varepsilon' \cdot \varepsilon^{\nu}$. В самом деле, экватор изображает точки с модулем 1 и поэтому может быть представлен посредством функции $z = e^{i\varphi}$, где φ принимает вещественные

значения от 0 до 2π. Поэтому соответствующее w равно:

$$w = \frac{1}{2}\left(z^{n} + \frac{1}{z^{n}}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{ni\varphi} + e^{-ni\varphi}\right) = \cos(n\varphi);$$

оно, действительно, остается всегда вещественным и по модулю меньше единицы, а именно принимает по разу все значения между $+1$ и -1, когда φ пробегает дугу длиною в $\frac{\pi}{n}$, т. е. один из тех отрезков, о которых идет речь.

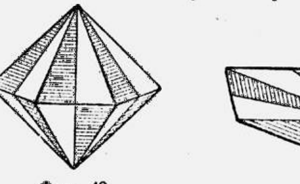
Определенные таким образом кривые разделяют сферу z на $2 \cdot 2n$ — вообще треугольной формы — полуобластей; каждая из них ограничена тремя кривыми, по одной каждого рода, и соответствует одному из полулистов поверхности Римана. Только в замечательных точках сходятся вместе по несколько областей, а именно, как это и должно быть по таблице кратностей (стр. 176), в северном и южном полюсах по $2 \cdot n$, а в каждой из точек ε^{ν} и $\varepsilon' \cdot \varepsilon^{\nu}$ по $2 \cdot 2$. Чтобы определить, какие из этих областей следует заштриховать, обратим внимание на то, что граница задней полусферы w, считая в положительном направлении, состоит из сплошной, черточно-пунктирной и точечно-пунктирной кривой; ввиду конформности отображения следует заштриховать все те полуобласти, у которых три части периферии следуют одна за другой в таком же порядке, все же остальные оставить без штриховки.

Таким образом мы получили полное геометрическое изображение зависимости между z и w, выражаемой нашим уравнением; это изображение можно проследить еще дальше, подробнее разбирая конформное отображение отдельной треугольной области на полусфере w, но мы не станем здесь этим заниматься. Я хочу только описать эти результаты в применении к случаю $n = 6$, на котором мы останавливались выше. В этом случае сфера распадается на 12 заштрихованных и 12 незаштрихованных треугольников, из которых на нашем рисунке видно по 6 тех и других. В каждом полюсе сходятся по 6 треугольников того и другого рода, а в 12 равноотстоящих точках экватора по 2. Каждая область конформно отобра-

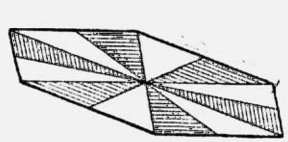
жается на таком же полулисте поверхности Римана; последние, соответственно группировке полуобластей сопряжены по 6 полулистов каждого рода над местом разветвления ∞ и по 2 каждого рода над местами разветвления ± 1.

Особенно удобное и, ввиду аналогии с последующим, особенно ценное изображение деления сферы получается так: соединяют прямыми каждые две соседние точки деления экватора, отстоящие одна от другой на $\frac{2\pi}{n}$ (например все ε^ν), и затем каждую из них с обоими полюсами (фиг. 49). Таким образом получают вписанную в сферу двойную пирамиду с n (на нашем рисунке 6) боковыми гранями у каждой из простых пирамид. Если спроектировать сферу с ее областями из центра на эту пирамиду, то каждая треугольная грань разделится своей высотой на заштрихованную и незаштрихованную половину. Если принять эту двойную пирамиду за изображение деления сферы и, следовательно, нашей функции, то она окажет нам те же услуги, какие представят **правильные многогранники** в нижеследующих примерах. Мы достигаем полной аналогии с последними, если представим себе, что наша двойная пирамида сплюснута в плоскость оснований, и станем рассматривать получающийся при этом дважды покрытый правильный n-угольник (шестиугольник), обе стороны которого разделены прямыми, соединяющими центр его с вершинами и со срединами сторон, на $2n$ треугольников каждая (фиг. 50). Я всегда был склонен причислять эту фигуру, называя ее **диэдром**, к пяти правильным многогранникам, которые известны со времен Платона. Действительно, она удовлетворяет всем условиям, которыми обыкновенно определяют правильный многогранник: все ее ребра равны между собой (стороны правильного n-угольника), и углы ее также равны между собой (углы n-угольника); единственное различие заключается в том, что она не представляет собой тела в тесном смысле слова, так как заключает в себе объем, равный нулю. Таким образом теорема Платона о том, что существует только пять правильных многогранников, справедлива лишь в том случае, если включить в определение требование — всегда, конечно, молча подразумеваемое, — чтобы многогранник был телом в собственном смысле слова.

Исходя от диэдра, можно, очевидно, получить наше деление сферы, проектируя на сферу не только его вершины, но и середины его сторон и боковые грани; поэтому его тоже можно рассматривать как представителя



Фиг. 49.



Фиг. 50.

изображаемой нашим уравнением функциональной зависимости между w и z, так что это уравнение можно, как уже было указано, назвать уравнением диэдра.

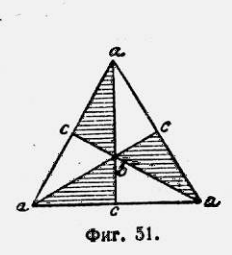
Теперь мы переходим к упомянутым уже примерам, которые стоят в самом тесном отношении к правильным телам Платона.

3. Уравнения тетраэдра, октаэдра и икосаэдра.

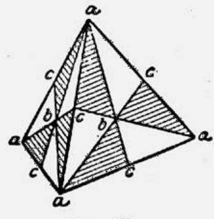
Мы увидим, что два последние уравнения мы могли бы с таким же правом назвать уравнениями куба и додекаэдра, так, что действительно перебраны все пять правильных тел. Здесь мы пойдем по обратному пути, сравнительно с предыдущим примером: сперва мы выведем, исходя от правильного тела, деление сферы на области и затем составим соответствующее алгебраическое уравнение, которое находит в этой фигуре свое геометрическое наглядное изображение. Но мне придется при этом часто ограничиваться намеками, и поэтому я с самого начала указываю вам на мою книгу: „Лекции об икосаэдре и о решении уравнений пятой степени" („Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade", Leipzig 1884), в которой вы найдете систематическое изложение всей этой обширной теории со всеми ее приложениями.

Я буду разбирать все три случая параллельно и начну с деления сферы на области для тетраэдра.

1. Тетраэдр. Разделим каждый из 4 равносторонних треугольников тетраэдра тремя высотами на 6 треугольничков, которые по три конгруентны между собой, в то время как 2 неконгруентных треугольничка зеркально симметричны между собой (фиг. 51). В результате получается подразделение всей поверхности тетраэдра на 12 конгруентных между собой и 12 других, тоже конгруентных между собой, но зеркально равных первым, треугольничков; одну из этих групп треугольничков отметим штриховкой (фиг. 52). Что же касается углов этих треугольников, то можно различать три рода их, так что каждый треугольник имеет по одному углу каждого рода:



Фиг. 51.



Фиг. 52.

a) 4 вершины первоначального тетраэдра, в которых сходятся по 3 заштрихованных и по 3 незаштрихованных треугольника;

b) 4 центра боковых граней, которые, в свою очередь, образуют правильный тетраэдр (противоположный тетраэдр); в них сходятся по 3 треугольника каждого рода;

c) 6 середин ребер, образующие правильный октаэдр; в них сходятся по 2 треугольника каждого рода.

Если спроектировать это деление на треугольники из центра на описанную сферу, то последняя разделится на $2 \cdot 12$ треугольников, ограниченных дугами больших кругов; они попеременно конгруентны и симметричны. Около каждой вершины рода a, b, c, расположено соответственно по 6, 6, 4 равных угла, и так как сумма углов на поверхности шара вокруг точки всегда равна 2π, то каждый

из наших сферических треугольников имеет в вершинах a и b углы $\frac{\pi}{3}$, а в вершине c — угол $\frac{\pi}{2}$.

Характерное свойство этого подразделения сферы заключается в том, что оно — как и сам тетраэдр — при некоторых вращениях около центра переходит само в себя. Вы легко можете представить себе это во всех деталях на модели тетраэдра, которую вы видите перед собой и которую я взял из нашей коллекции моделей; но здесь я ограничусь тем, что перечислю все возможные вращения, причем к ним всегда будет сопричисляться „движение", оставляющее фигуру в покое, в качестве „тождественного вращения". Выберем какую-нибудь определенную вершину первоначального тетраэдра; вращением мы можем совместить ее с любой другой вершиной тетраэдра (и даже с нею же самой), что дает четыре возможных случая. Оставляя же ее неподвижной в одном из этих положений, можно тремя различными способами совместить тетраэдр с самим собой, а именно — вращая его на углы в 0, 120 или 240° вокруг прямой, проходящей через эту неподвижную вершину и через центр. Это дает в общем $4 \cdot 3 = 12$ вращений, которые переводят тетраэдр или соответствующее деление описанной сферы на треугольники в самого себя. Посредством таких вращений можно любой заштрихованный (или незаштрихованный) треугольник перевести в любой другой заштрихованный (соответственно незаштрихованный) треугольник; любое вращение вполне определено, если дан и этот второй треугольник. Эти 12 вращений образуют, очевидно, то, что называют группой G_{12}, т. е. если произвести два таких вращения одно после другого, то результат будет соответствовать одному из 12 вращений.

Если рассматривать нашу сферу как сферу z-ов, то каждое из этих 12 вращений может быть представлено посредством линейного преобразования z; получаемые таким образом 12 линейных преобразований не изменяют уравнения, принадлежащего тетраэдру. Для сравнения я замечу, что, как вы сами можете убедиться, $2n$ линейных подстановок уравнения диэдра можно интерпретировать как совокупность вращений диэдра в себе.

2. Приложим аналогичные рассуждения к **о к т а э д р у**; но теперь мы можем выражаться более сжато. Разделим, как и раньше, каждую из 8 боковых треугольных граней на 6 треугольничков; получается подразделение всей поверхности октаэдра на 24 конгруентных между собой заштрихованных треугольничка и на 24, в свою очередь, конгруентных между собой, но зеркально симметричных по отношению к первым, незаштрихованных треугольничка (фиг. 53). И на этот раз можно различать вершины трех родов:

a) 6 **в е р ш и н о к т а э д р а**, в которых сходятся по 4 треугольника каждого рода;

b) 8 **ц е н т р о в г р а н е й**, образующие вершины куба; в них сходятся по 3 треугольника каждого рода;

c) 12 **с е р е д и н р е б е р**, в которых встречаются по 2 треугольника каждого рода.

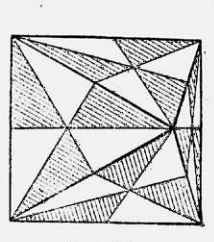
Переходя, с помощью центральной проекции, к описанной сфере, получаем подразделение на $2 \cdot 24$ конгруентных, соответственно симметричных треугольника, каждый из которых имеет в вершине a угол $\frac{\pi}{4}$, в вершине b — угол $\frac{\pi}{3}$ и в вершине c — угол $\frac{\pi}{2}$. Принимая во внимание то обстоятельство, что вершины b образуют куб, легко можно убедиться в том, что точно такое же подразделение получилось бы, если исходить от куба и проектировать его вершины и середины граней и ребер на сферу; таким образом, действительно, не приходится рассматривать куб отдельно.

Совершенно так же, как и в первом случае, можно убедиться в том, что как октаэдр, так и это подразделение сферы на области переходят сами в себя при 24 вращениях, образующих группу G_{24}; каждое отдельное вращение характеризуется тем, что оно переводит один заданный треугольник в определенный другой треугольник.

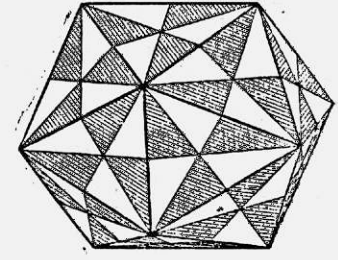
3. Теперь мы подошли к **и к о с а э д р у** (двадцатиграннику). И здесь в основу кладем деление каждой из 20 треугольных граней на 6 составляющих треугольничков и в общем получаем 60 заштрихованных и 60 незаштрихованных таких треугольничков (фиг. 54). Три типа вершин в этом случае будут:

a) 12 **в е р ш и н и к о с а э д р а**, в которых сходится по 5 треугольников каждого рода;

b) 20 **ц е н т р о в г р а н е й**; они образуют вершины правильного пентагондодекаэдра (двенадцатигранника с пятиугольными гранями); в них встречается по 3 треугольника каждого рода;



Фиг. 53.



Фиг. 54.

c) 30 **с е р е д и н р е б е р**; в них сходятся по 2 треугольника того и другого рода.

Поэтому при перенесении на сферу каждый треугольник получает при вершинах a, b, c углы $\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$. Из свойства углов b можно опять заключить, что такая же фигура получилась бы из правильного додекаэдра. Наконец, можно видеть, что икосаэдр и соответствующее подразделение сферы переходят сами в себя посредством группы G_{60} из 60 вращений сферы около центра. Эти вращения, как и вращения октаэдра, вы можете уяснить себе на модели, подобно той, которую вы видите здесь.

Я еще раз хочу сопоставить те углы сферических треугольников, которые получались в трех рассмотренных случаях, присоединяя сюда же и диэдр:

Д и э д р: $\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$

Т е т р а э д р: $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$

Октаэдр: $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$

Икосаэдр: $\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$.

Натуралист, вероятно, немедленно заключил бы из этого, что возможны и дальнейшие аналогичные подразделения сферы с углами $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{7}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}; \ldots$ Но математик не должен, разумеется, применять таких заключений по аналогии, и его осторожность оказывается в данном случае справедливой, так как действительно ряд возможных подразделений сферы описанного рода обрывается на перечисленных выше. Конечно, этот факт стоит в связи с тем, что нет других правильных многогранных тел, кроме 5 платоновых тел. Последнее основание этого можно усмотреть в некотором свойстве целых чисел, которое не может быть сведено к более простым соображениям. А именно, можно показать, что углы каждого из наших треугольников должны быть такими целыми частями π: $\frac{\pi}{m}, \frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{r}$, чтобы было удовлетворено неравенство:

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{r}>1;$$

оказывается, что этому неравенству удовлетворяют только перечисленные выше решения. Впрочем, смысл этого неравенства легко понять, так как оно говорит, что сумма углов сферического треугольника всегда больше π.

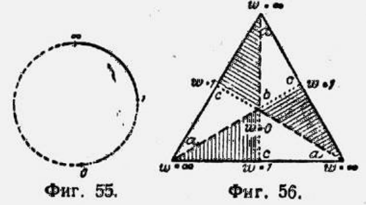
Я хотел бы здесь еще упомянуть о том, что, — как многим из вас, конечно, известно, — разумное обобщение этой теории выходит за эти как будто слишком узкие рамки: теория **автоморфных функций** рассматривает деления сферы на бесчисленное множество треугольников с суммой углов, меньшей π, или соответственно равной π.

4. Продолжение; вывод уравнений.

Теперь мы переходим ко второй части нашей задачи, а именно, к установлению тех уравнений вида

$$\varphi(z) - w \cdot \psi(z) = 0, \quad \text{или} \quad w = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}, \tag{1}$$

которые принадлежат каждому из наших подразделений сферы, т. е. тех уравнений, в силу которых обе полусферы w отображаются на $2 \cdot 12$, или, соответственно, на $2 \cdot 24$, или, наконец, на $2 \cdot 60$ треугольничках сферы z. Таким образом каждому значению w должно в общем соответствовать по 12, 24, 60 значений z — каждое в треугольнике соответствующего рода, — так что искомые уравнения должны иметь степень 12, 24, 60, которую мы будем обозначать вообще через N. Но каждый **треугольничек** опирается на три замечательные точки, так что во всяком случае на сфере w должны быть три точки разветвления, которые мы поместим, как это принято, в точках $w = 0, 1, \infty$; в качестве линии разреза $\mathfrak{C}$, проходящей через эти три точки, три отрезка которой должны соответствовать пограничным линиям треугольников z, мы снова возьмем меридиан вещественных чисел (фиг. 55).



Фиг. 55. Фиг. 56.

Далее, мы устанавливаем, что в каждом из трех случаев точке $w = 0$ соответствуют центры граней (углы b в прежнем обозначении), точке $w = 1$ соответствуют середины ребер (углы c) и точке $w = \infty$ соответствуют вершины многогранника (углы a) (фиг. 56). При этих условиях стороны треугольников соответствуют так, как это указано на чертеже, трем отрезкам меридиана w, и при этом заштрихованные треугольники соответствуют задней, а незаштрихованные передней полусфере. При этом уравнение (1) должно, соответственно этим сопряжениям, отображать взаимно-однозначно сферу z на N-листной римановой поверхности, покрывающей сферу w и имеющей разветвления в точках $0, 1, \infty$.

Можно было бы легко вывести a priori существование этого уравнения из общих теорем теории функций, но я не хочу здесь предполагать необходимых для этого знаний и предпочитаю более эмпирическое построение отдельных уравнений, которое, быть может, даст нам и более живое и наглядное представление об отдельных моментах.

Представим себе уравнение (1) написанным в однородных переменных:

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{\Phi_N(z_1, z_2)}{\Psi_N(z_1, z_2)},$$

где Φ_N, Ψ_N обозначают однородные многочлены измерения N в z_1, z_2 ($N = 12$, 24 или 60). При таком способе писания уравнения исключительную роль играют точки $w_1 = 0$ и $w_2 = 0$ на сфере w; но так как наряду с ними для нас всегда представляет равный интерес и третья точка разветвления $w = 1$ (в однородных переменных: $w_1 - w_2 = 0$), то представляется целесообразным иметь в виду и следующую форму уравнения:

$$\frac{w_1 - w_2}{w_2} = \frac{X_N(z_1, z_2)}{\Psi_N(z_1, z_2)},$$

где $X_N = \Phi_N - \Psi_N$ тоже представляет форму N-го измерения. Оба вида я предпочитаю соединить в одну непрерывную пропорцию:

$$w_1 : (w_1 - w_2) : w_2 = \Phi_N(z_1, z_2) : X_N(z_1, z_2) : \Psi_N(z_1, z_2); \qquad (2)$$

это представляет собой однородную форму уравнения (1) и в ней одинаково приняты во внимание все три точки разветвления.

Теперь наша задача заключается в том, чтобы составить формы Φ_N, X_N, Ψ_N; для этой цели мы сразу же поставим их в связь с нашим делением сферы z. Из уравнения (2) мы находим, что при $w_1 = 0$ оказывается $\Phi_N(z_1, z_2) = 0$, т. е. значению $w = 0$ соответствуют на сфере z N корней формы Φ_N. С другой же стороны, согласно нашим условиям, месту разветвления $w = 0$ должны соответствовать центры граней многогранников (вершины b в нашем подразделении); число их в каждом случае равно $\frac{N}{3}$; но в каждой из этих точек встречается по три заштрихованных и по три незаштрихованных треугольника, однократно отображенных на отдельных полусферах, так что каждую из них следует считать тройным корнем нашего уравнения. Таким образом эти точки, если принять во внимание их кратность, доставляют все точки, соответствующие $w = 0$, и следовательно, все корни функции Φ_N; таким образом функция Φ_N имеет исключительно **тройные корни** и представляет поэтому третью степень некоторой формы $\varphi\ (z_1, z_2)$ степени $\frac{N}{3}$:

$$\Phi_N = \left(\varphi_{\frac{N}{3}}(z_1, z_2)\right)^3.$$

Таким же образом находим, что значениям $w = 1$ или $w_1 - w_2 = 0$ соответствуют корни уравнения $X_N = 0$, и что они тождественны с $\frac{N}{2}$ серединами ребер многогранника, считая по два раза каждую (вершины c в нашем подразделении); поэтому X_N должно быть полным квадратом формы измерения $\frac{N}{2}$:

$$X_N = \left(\chi_{\frac{N}{2}}(z_1, z_2)\right)^2.$$

Наконец, значению $w = \infty$ соответствуют корни функции Ψ_N, и поэтому они должны быть тождественны с вершинами первоначального многогранника (вершины a); в них сходятся в соответственных случаях по 3, 4 или 5 треугольников, так что получаем:

$$\Psi_N = \left(\psi_{\frac{N}{\nu}}(z_1, z_2)\right)^\nu, \quad \text{где } \nu = 3,\ 4 \text{ или } 5.$$

Таким образом наше уравнение непременно должно иметь вид:

$$w_1 : (w_1 - w_2) : w_2 = \varphi(z_1, z_2)^3 : \chi(z_1, z_2)^2 : \psi(z_1, z_2)^\nu; \qquad (3)$$

измерения и показатели форм φ, χ, ψ, а также значения степени уравнения N получаются из следующей таблички:

Тетраэдр: $\varphi_4^3,\ \chi_6^2,\ \psi_4^3;\ N = 12$

Октаэдр: $\varphi_8^3,\ \chi_{12}^2,\ \psi_6^4;\ N = 24.$

Икосаэдр: $\varphi_{20}^3, \chi_{30}^2, \psi_{12}^5; N = 60.$

Теперь я хочу еще показать, что и разобранное раньше уравнение диэдра можно включить в эту схему (3). Мы должны только вспомнить, что там мы помещали места разветвления на сфере w в точках $-1, +1, \infty$, а не в точках $0, +1, \infty$, как теперь, так что мы достигнем действительной аналогии с уравнениями (3) лишь в том случае, если потребуем представить уравнение диэдра в таком виде:

$$(w_1 + w_2) : (w_1 - w_2) : w_2 = \Phi : X : \Psi.$$

Из формы уравнения диэдра:

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{z_1^{2n} + z_2^{2n}}{2z_1^n z_2^n},$$

которой мы пользовались в свое время (стр. 174), с помощью простого преобразования получаем:

$$(w_1 + w_2) : (w_1 - w_2) : w_2 =$$
$$= (z_1^{2n} + z_2^{2n} + 2z_1^n z_2^n) : (z_1^{2n} + z_2^{2n} - 2z_1^n z_2^n) : 2z_1^n z_2^n =$$
$$= (z_1^n + z_2^n)^2 : (z_1^n - z_2^n)^2 : 2(z_1, z_2)^n.$$

Таким образом мы действительно можем присоединить к предыдущей табличке следующую строчку:

Диэдр: $\varphi_n^2, \chi_n^2, \psi_n^2; N = 2n.$

Замечательные точки и их кратности непосредственно определяются по этой форме уравнения и совпадают с установленными раньше (стр. 176).

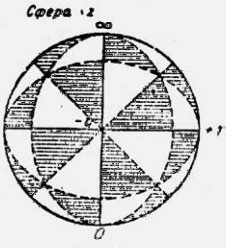
Теперь нашей задачей является действительно построить формы φ, χ, ψ в трех новых случаях. При этом я остановлюсь подробнее только на октаэдре, для которого обстоятельства складываются наиболее просто. Но и здесь, желая оставаться в рамках краткого обзора, я многое буду только намечать и сообщать в виде результатов; всякий же, кто пожелает познакомиться с этим ближе, может найти подробное изложение в моей книге об икосаэдре.

Ради простоты представим себе, что октаэдр так вписан в сферу z, что 6 его вершин совпадают с точками $z = 0, \infty, +1, +i, -1, -i$ (фиг. 57): При таком положении октаэдра те 24 линейные подстановки z, которые изображают его вращения, т. е. перемещают названные 6 точек, можно представить в очень простом виде: начнем с 4 вращений, при которых вершины 0 и ∞ остаются неподвижными:

$$z' = i^k \cdot z \quad (k = 0, 1, 2, 3). \tag{4a}$$

Далее можно, например, посредством подстановки $z' = \frac{1}{z}$ [т. е. вращения около горизонтальной оси $(+1, -1)$ на 180°] переместить точку 0 в ∞; применяя затем еще 4 вращения (4a), получим 4 новых подстановки:

$$z' = \frac{i^k}{z} \; (k = 0, 1, 2, 3). \tag{4b}$$



Фиг. 57.

Точно так же переместим с помощью подстановок

$$z' = \frac{z+1}{z-1}, \; \frac{z+i}{z-i}, \; \frac{z-1}{z+1}, \; \frac{z-i}{z+i}$$

поочередно каждую из 4 точек $z = 1, +i, -1, -i$ в ∞; применяя каждый раз 4 вращения (4a), получим еще $4 \cdot 4 = 16$ подстановок октаэдра:

$$\left.\begin{aligned} z' &= i^k \cdot \frac{z+1}{z-1}, & z' &= i^k \cdot \frac{z-1}{z+1} \\ z' &= i^k \cdot \frac{z+i}{z-i}, & z' &= i^k \cdot \frac{z-i}{z+i} \end{aligned}\right\} (k = 0, 1, 2, 3) \cdot \tag{4c}$$

Теперь мы нашли все 24 искомые подстановки; непосредственным вычислением можно убедиться в том, что они действительно переводят 6 вершин октаэдра в самих себя и что они образуют группу, другими словами, что последовательное производство любых двух из этих подстановок представляет снова некоторую подстановку (4).

Теперь я хочу прежде всего образовать форму ψ_6, которая имеет простыми корнями 6 вершин октаэдра: точка $z = 0$ дает множитель z_1, точка $z = \infty$ дает множи-

тель z_2; 4 точки ± 1 и $\pm i$ представляют простые корни формы $z_1^4 - z_2^4$, так что окончательно получаем:

$$\psi_6 = z_1 \cdot z_2 \cdot (z_1^4 - z_2^4). \tag{5a}$$

Труднее составить формы φ_8 и χ_{12}, для которых центры граней и, соответственно, середины ребер служат простыми корнями; я приведу их здесь без вывода:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_8 &= z_1^8 + 14 z_1^4 z_2^4 + z_2^8, \\ \chi_{12} &= z_1^{12} - 33 z_1^8 z_2^4 - 33 z_1^4 z_2^8 + z_2^{12}. \end{aligned}\right\} \tag{5b}$$

Конечно, во все эти три формы входит еще неопределенный постоянный множитель. Поэтому, если под $\varphi_8, \psi_6, \chi_{12}$ понимать формы в том виде, как они выражены равенствами (5), то в уравнение октаэдра (3) следует еще ввести неопределенные постоянные c_1, c_2 и писать его в таком виде:

$$w_1 : (w_1 - w_2) : w_2 = \varphi_8^3 : c_1 \chi_{12}^2 : c_2 \psi_6^4.$$

Кроме того, надо так определить постоянные c, чтобы последние уравнения действительно представляли только одно уравнение между z и w, а это имеет место в том и только в том случае, если

$$\varphi_8^3 - c_2 \psi_6^4 = c_1 \chi_{12}^2$$

тождественно в z_1, z_2. Последнее соотношение действительно можно осуществить при помощи соответствующего выбора постоянных c_1, c_2, а именно имеет место, — в чем можно убедиться простым преобразованием, — тождество:

$$\varphi_8^3 - 108 \psi_6^4 = \chi_{12}^2,$$

так что уравнение октаэдра (3) принимает следующий вид:

$$w_1 : (w_1 - w_2) : w_2 = \varphi_8^3 : \chi_{12}^2 : 108 \psi_6^4. \tag{6}$$

Это уравнение действительно отображает точки $w = 0, 1, \infty$ соответственно в центрах граней, серединах ребер и вершинах октаэдра с надлежащей кратностью, так как формы φ, χ, ψ составлены соответственным образом. Кроме того, 24 подстановки октаэдра (4) переводят это уравнение само в себя, так как они преобразуют корни каждой формы φ, χ, ψ и самих себя и, следовательно, вводят в самые формы только лишь по множителю, а вычисление

показывает, что при образовании частных эти множители выпадают.

Остается еще показать, что это уравнение действительно отображает конформным образом каждый заштрихованный или незаштрихованный треугольник сферы z на заднюю или переднюю полусферу w. Нам уже известно, что трем вершинам каждого треугольника соответствуют точки $0, 1, \infty$ вещественного меридиана w и что внутри каждого треугольника w принимает не более чем по разу одно и то же значение, ибо уравнение при этом w имеет только 24 корня, которые должны распределиться по 24 однородным треугольникам. Если бы нам удалось еще показать, что w вообще остается вещественным вдоль трех сторон треугольника, то отсюда нетрудно было бы заключить, что каждая сторона взаимно-однозначно отображается на отрезке вещественного меридиана w и что все внутренние точки треугольника сопряжены конформно и взаимно-однозначно с полусферой. Вы легко сумеете сами довести до конца эту цепь выводов, в которой главное значение имеет то обстоятельство, что отображение производится непрерывной и аналитической функцией $w(z)$. Я же хочу подробнее остановиться только на одном моменте доказательства, а именно на доказательстве вещественности w на сторонах треугольника.

Оказывается более удобным доказывать это утверждение в такой форме, что w имеет вещественное значение на всех больших кругах, которые образуют подразделение октаэдра. Это прежде всего те 3 взаимно перпендикулярных круга, которые проходят через каждые 4 из 6 вершин октаэдра и соответствуют ребрам октаэдра (большие круги, изображенные на фиг. 57 сплошными линиями), и, далее, 6 кругов, соответствующих высотам граней октаэдра; они делят пополам углы между большими кругами (малые круги на фиг. 57, пунктир из черточек). С помощью подстановок октаэдра можно любой большой круг превратить в любой другой и точно так же каждый малый круг превратить в любой другой. Поэтому достаточно показать, что w сохраняет вещественное значение вдоль одного какого-нибудь большого и одного малого круга, ибо на других кругах оно должно принимать те же самые значения.

Но среди больших кругов имеется меридиан вещественных чисел z, и на нем, конечно, w имеет вещественное значение, получаемое из уравнения (6):

$$w = \frac{w_1}{w_2} = \frac{\varphi_8^3}{180\,\psi_6^4},$$

так как φ и ψ представляют вещественные многочлены относительно z_1 и z_2.

Из малых кругов, проходящих через точки 0 и ∞, мы выбираем тот, который составляет с вещественным меридианом угол в 45° и вдоль которого, следовательно, z принимает значения $z = e^{\frac{i\pi}{4}} \cdot r$, где r проходит через вещественные значения от $-\infty$ до $+\infty$; вдоль него, во всяком случае, $z^4 = e^{i\pi} \cdot r = -r$ имеет вещественное значение; а так как, в силу уравнения (5), в функцию φ_8 и в четвертую степень функции ψ_6 входят только четвертые степени z_1 и z_2, то w, ввиду последней формулы, опять-таки имеет вещественное значение.

Теперь мы подошли к концу нашего доказательства: уравнение (6) действительно отображает конформным образом полуплоскости, соответствующие римановой сфере или покрывающей ее римановой поверхности, на сферу z в ее подразделении на треугольники, соответствующем октаэдру; поэтому мы — и обратно — с той же полнотой владеем геометрически зависимостью между z и w, устанавливаемой этим уравнением, как и в предыдущих примерах.

С тетраэдром и икосаэдром поступают совершенно таким же образом; я дам здесь лишь результаты, которые и в этих случаях получаются при возможно более простом положении подразделения на сфере z. Для тетраэдра[1]) получается такое уравнение:

$$w_1 : (w_1 - w_2) : w_2 = \left\{ z_1^4 - 2\sqrt{-3}\, z_1^2 z_2^2 + z_2^4 \right\}^3 :$$
$$: -12\sqrt{-3} \left\{ z_1 z_2 (z_1^4 - z_2^4) \right\}^2 :$$
$$: \left\{ z_1^4 + 2\sqrt{-3}\, z_1^2 z_2^2 + z_2^4 \right\}^3,$$

[1]) Ср. „Ikosaeder“, p. 60, 51.

а для икосаэдра[1]):

$$w_1 : (w_1 - w_2) : w_2 =$$
$$= \left\{ -(z_1^{20} + z_2^{20}) + 228\,(z_1^{15} z_2^5 - z_1^5 z_2^{15}) - 494\, z_1^{10} z_2^{10} \right\}^3 :$$
$$: - \left\{ (z_1^{30} + z_2^{30}) + 522\,(z_1^{25} z_2^5 - z_1^5 z_2^{25}) - \right.$$
$$\left. -10\,005\,(z_1^{20} z_2^{10} + z_1^{10} z_2^{20}) \right\}^2 :$$
$$: 1728 \left\{ z_1 z_2 (z_1^{10} + 11\, z_1^5 z_2^5 - z_2^{10}) \right\}^5;$$

другими словами, эти уравнения отображают полусферы w на заштрихованные и незаштрихованные треугольники принадлежащего тетраэдру и икосаэдру подразделения сферы z.

5. О решении нормальных уравнений.

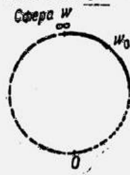
Теперь мы займемся общими свойствами тех уравнений, которые мы до сих пор рассматривали как примеры общей теории, развитой выше, и которым мы дадим название **нормальных уравнений**. Конечно, я и здесь могу представить вам положение вещей лишь в самых простых случаях, отсылая интересующихся подробностями к моей книге об икосаэдре.

Начну с того замечания, что крайне простая природа всех наших нормальных уравнений происходит от того, что **они допускают столько же линейных подстановок, сколько единиц в показателе их степени**, так что все корни представляют линейные функции одного из них; замечу также, что в подразделениях сферы мы имеем крайне наглядный геометрический образ всех рассматриваемых здесь соотношений. Я хочу показать на примере одного вопроса, относящегося к уравнению икосаэдра, до чего просто слагается, благодаря указанным обстоятельствам, многое такое, что вообще оказывается крайне сложным, когда имеешь дело с уравнениями столь высокой степени.

Дано вещественное значение w_0, например, на отрезке $(1, \infty)$ вещественного меридиана w; требуется определить 60 корней z уравнения икосаэдра при $w = w_0$ (фиг. 58). Наша теория отображения показывает, что каждый из

[1]) „Ikosaeder“, p. 60, 56.

них должен лежать на одной из 60 соответственных (на фиг. 56 сплошных) сторон треугольников подразделения сферы z. Таким образом выполнено то, что в теории уравнений называют отделением корней, представляющим большей частью крайне утомительную работу, которая должна предшествовать численному вычислению корней: так называется задача определения таких отдельных промежутков, в которых, наверно, заключается только по одному корню. Но мы можем также сразу определить, сколько среди этих 60 корней вещественных. А именно, из того, что при приведенной выше форме уравнения икосаэдра последний предполагается вложенным в сферу z таким образом[1]), что вещественный меридиан проходит через 4 угла каждого рода a, b, c, вытекает, что (ср. фиг. 56 и 54) как раз 4 сплошных стороны треугольников лежат вдоль вещественного меридиана, так что имеется как раз 4 вещественных корня. То же самое имеет место, если w_0 лежит в одном из двух других отрезков вещественного меридиана w, так что вообще при всяком вещественном w уравнение икосаэдра имеет 4 вещественных и 56 мнимых корней.



Фиг. 58.

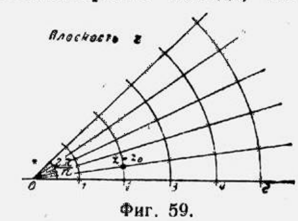
Теперь я хочу сказать несколько слов о действительном численном определении корней наших нормальных уравнений. Прежде всего, здесь снова является для нас благоприятным то обстоятельство, что вычислять приходится каждый раз только один корень уравнения, так как остальные корни получаются посредством линейных подстановок. Впрочем, я должен заметить, что численное определение корня представляет, собственно говоря, задачу анализа, а не алгебры, так как оно необходимо требует применения бесконечных процессов, чтобы представить с любым приближением иррациональные, обыкновенно, значения корней.

Более подробно я остановлюсь только на самом простом примере — на двучленном уравнении $w = z^n$, причем я снова прихожу в непосредственное соприкосновение

[1]) Ср. „Ikosaeder", p. 55.

со школьной математикой, так как и в ней разбирается эта задача — вычисление $\sqrt[n]{w}$, — по крайней мере, для первых значений n и для положительных вещественных значений $w = r$. Метод вычисления квадратных и кубических корней, известный всем вам со школьной скамьи, состоит, в сущности, в следующем: исследуют, какое место занимает подрадикальное число $w = r$ в ряду квадратов или кубов целых чисел 1, 2, 3, 4,...; затем, основываясь на десятичной системе письменного счисления, повторяют то же испытание с десятыми долями найденного промежутка, затем с сотыми долями и т. д., получая при этом, разумеется, любую степень точности.

Здесь мы применим более рациональный метод, который годится не только при любых целых n, но и при любых комплексных значениях w. Так как нам нужно найти лишь одно какое-нибудь решение уравнения, то станем искать как раз то значение $z = \sqrt[n]{w}$, которое лежит внутри угла $\frac{2\pi}{n}$, построенного при оси вещественных чисел (фиг. 59). Строго придерживаясь обобщения упомянутого выше элементарного метода, начнем с того, что



Фиг. 59.

разделим (лучами, проходящими через вершину) ограничиваемое этим углом пространство на ν равных частей (на чертеже $\nu = 5$) и пересечем эти лучи окружностями, описанными около начала радиусами $r = 1, 2, 3,...$ Таким образом мы получим — при выбранном ν — внутри угла все точки

$$z = r \cdot e^{\frac{2i\pi}{n} \cdot \frac{k}{\nu}} \quad \begin{pmatrix} k = 0, 1, 2, \ldots, \nu \\ r = 1, 2, 3, \ldots \end{pmatrix}$$

и соответствующие им значения w:

$$w = z^n = r^n \cdot e^{2i\pi \frac{k}{\nu}}$$

мы можем сразу указать в плоскости w. Они образуют там вершины подобной же, но покрывающей всю плоскость w сети, которая состоит из окружностей с радиусами 1^n, 2^n, 3^n,... и лучей, составляющих с вещественною осью углы $0, \frac{2\pi}{\nu}, \frac{4\pi}{\nu}, \ldots, \frac{(\nu-1)2\pi}{\nu}$ (фиг. 60). Данное значение w должно находиться в какой-нибудь из этих клеток; пусть w_0 есть ближайшая к этому w вершина. Одно из значений $z_0 = \sqrt[n]{w_0}$ нам известно: это — одна из вершин исходной сети в плоскости z. Теперь полагаем для искомого значения корня:

$$z = \sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{w_0 + (w - w_0)} =$$

$$= \sqrt[n]{w_0} \sqrt[n]{1 + \frac{w - w_0}{w_0}} = z_0 \left(1 + \frac{w - w_0}{w_0}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Фиг. 60.

Правую часть развернем по биному Ньютона, который мы спокойно можем считать известным, ибо мы и без того ведь, в сущности, находимся в области анализа:

$$z = z_0 \left(1 + \frac{1}{n} \cdot \frac{w - w_0}{w_0} + \frac{1-n}{2n^2} \cdot \left(\frac{w - w_0}{w_0}\right)^2 + \ldots\right).$$

Вопрос о сходимости этого ряда мы можем решить сразу, рассматривая его как разложение аналитической функции $\sqrt[n]{w}$ в ряд Тейлора и применяя ту теорему, что ряд Тейлора сходится внутри окружности, описанной около w_0 и проходящей через ближайшую особенную точку. Так как для $\sqrt[n]{w}$ особенными точками являются только 0 и ∞, то написанный выше ряд будет сходиться тогда и только тогда, когда w будет лежать внутри окружности, описанной около w_0 и проходящей через начало, чего мы всегда можем достигнуть, исходя в случае надобности из подобной же сети в плоскости z, но с более мелкими клетками. А чтобы наш ряд сходился хорошо, т. е. годился для численного определения, необходимо, сверх того, чтобы дробь $\frac{w - w_0}{w_0}$ была достаточно мала, чего всегда можно достигнуть дальнейшим сужением сети. Этот прием действительно оказывается весьма пригодным для фактического выполнения численного определения корней.

Замечательно, что численное разрешение дальнейших нормальных уравнений правильных тел оказывается в сущности, нисколько не труднее; конечно, здесь я должен ограничиться указанием на это, как на факт. Если применить только что изложенный метод к нашим нормальным уравнениям и исходить из отображения двух соседних треугольников на сфере w, то вместо биномиального ряда появляются другие ряды, которые, однако, являются в анализе не менее известными и пользоваться которыми достаточно легко; это — гипергеометрические ряды. Я сам в 1877 г. дал численное выражение рядов, о которых идет речь („Weitere Untersuchungen über die Theorie des Ikosaeders", „Mathem. Annalen", Bd. XII, p. 515 ff.).

6. Униформизирование нормальных уравнений посредством трансцендентных функций.

Теперь я перейду к рассмотрению другого метода решения наших нормальных уравнений, который характеризуется систематическим привлечением трансцендентных функций. Вместо того чтобы в каждом отдельном случае обращаться к разложению в ряд в окрестности известного решения, при применении этого метода стараются представить раз навсегда все удовлетворяющие уравнению пары значений w, z как однозначные аналитические функции одной вспомогательной переменной или, как говорят, **униформизировать уравнение**. Если при этом удается применить такие функции, для которых легко можно составить таблицы значений или уже существуют числовые таблицы, то можно найти численное решение уравнения без новой вычислительной работы. Я тем охотнее поговорю об этом применении трансцендентных

функций, что в некоторых случаях оно имеет место и в школьном преподавании, причем там оно часто еще имеет неясный, почти мистический характер; причина же этого заключается в том, что все еще держатся старых, несовершенных воззрений даже там, где современная теория функций комплексных переменных давно уже все выяснила.

Теперь я подробнее разовью все эти замечания общего характера прежде всего на примере двучленного уравнения. Вам известно, что уже в школе постоянно вычисляют с помощью логарифмов положительное решение уравнения $z^n = r$ при положительном вещественном r, а именно, пишут уравнение в виде $z = e^{\frac{\ln r}{n}}$, понимая под $\ln r$ положительное главное значение этой функции; по таблице логарифмов находят сперва это значение, а затем в обратном порядке z, как „numerus“ $\frac{\ln r}{n}$; впрочем, обыкновенно пользуются вместо e основанием 10. Этот прием можно перенести на комплексные значения: чтобы удовлетворить уравнению

$$z^n = w,$$

полагают x равным общему значению комплексного логарифма $\ln w$, так что оказывается:

$$w = e^x,\ z = e^{\frac{x}{n}}.$$

При этом ввиду многозначности функции $x = \ln w$, — позднее мы еще будем подробно говорить об этой функции, — для одного и того же w действительно получается как раз n значений z. Этот x называют **униформизирующей переменной**. Но наши таблицы содержат только вещественные логарифмы вещественных чисел, так что применить указанный прием непосредственно к численному решению уравнения невозможно. Но можно, пользуясь некоторыми простыми свойствами логарифмов, свести вычисление к употреблению всем доступных тригонометрических таблиц. В самом деле, положим:

$$w = u + iv = \left|\sqrt{u^2 + v^2}\right| \cdot \left(\frac{u}{\left|\sqrt{v^2 + u^2}\right|} + i\,\frac{v}{\left|\sqrt{u^2 + v^2}\right|}\right);$$

первый множитель как положительное вещественное число имеет вещественный логарифм, а второй множитель, как величина с модулем 1, имеет, как известно, чисто мнимый логарифм $i \cdot \varphi$, причем φ получается из уравнений:

$$\frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} = \cos\varphi,\quad \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} = \sin\varphi.$$

Таким образом находим:

$$x = \ln w = \ln\left|\sqrt{u^2 + v^2}\right| + i\varphi,$$

так что искомый корень уравнения равен:

$$z = e^{\frac{x}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln\left|\sqrt{u^2+v^2}\right|} \cdot e^{\frac{1}{n}i\varphi} =$$

$$= e^{\frac{1}{n}\ln\left|\sqrt{u^2+v^2}\right|} \cdot \left[\cos\left(\frac{\varphi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n}\right)\right].$$

Ввиду того, что в величину φ входит слагаемым произвольное кратное 2π, наша формула доставляет все n значений корня. С помощью обыкновенных логарифмических и тригонометрических таблиц можно определить сперва φ по его синусу и косинусу, а затем по последней формуле и z. Мы получили здесь это **тригонометрическое решение** вполне естественным образом, исходя из логарифмов комплексных чисел; если же стоять на той точке зрения, что таких логарифмов не существует, и все же стараться получить это тригонометрическое решение, — в школе следуют такому именно пути, — то оно должно казаться чем-то совершенно странным и непонятным.

Но в одном месте школьного преподавания является необходимым извлекать корни из невещественных чисел, а именно при так называемом решении уравнения третьей степени по способу Кардана; я хочу сделать здесь по этому поводу несколько замечаний.

Если кубическое уравнение дано в приведенном виде:

$$x^3 + px - q = 0, \tag{1}$$

то, как известно, формула Кардана гласит, что три его корня x_1, x_2, x_3 содержатся в следующем выражении:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}. \tag{2}$$

Так как каждый кубический корень имеет три значения, то само по себе это выражение имеет 9 вообще различных значений; среди них x_1, x_2, x_3 определяются тем условием, что произведение обоих входящих в них кубических корней должно быть равно $-\frac{p}{3}$. Заменяя коэфициенты уравнения p, q их обычными выражениями в виде симметрических функций от x_1, x_2, x_3 и имея в виду, что коэфициент при x^2 равен $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, находим:

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = -\frac{(x_1 - x_2)^2 \cdot (x_2 - x_3)^2 \cdot (x_3 - x_1)^2}{103},$$

т. е. выражение, стоящее под знаком квадратного корня, равно — если не считать постоянного отрицательного множителя — дискриминанту уравнения. Отсюда следует, что подкоренное количество имеет отрицательное значение, если уравнение имеет три вещественных корня; положительным же подкоренное выражение будет в том случае, если один корень вещественный, а два другие мнимые сопряженные. Таким образом как раз в наиболее, повидимому, простом случае, когда кубическое уравнение имеет только вещественные корни, формула Кардана требует извлечения квадратного корня из отрицательного числа, а затем кубического корня из комплексной величины.

Этот переход через комплексное количество должен был, конечно, представляться старым алгебраистам в эпоху, когда они были еще так далеки от теории комплексных чисел — за 250 лет до того, как Гаусс показал их интерпретацию на числовой плоскости,—чем-то совершенно невозможным. Тогда говорили о **неприводимом случае** (casus irreducibilis) кубического уравнения и думали, что в этом именно случае формула Кардана не дает разумного, пригодного решения. Впоследствии, однако, нашли, что как раз в этом случае кубическое уравнение оказывается в тесной связи с трисекцией угла, и таким образом получили „тригонометрическое решение", целиком выполняемое в области вещественных чисел в качестве заместителя отказывающейся служить формулы Кардана; но при этом полагали, что открыли нечто совершенно новое, не стоящее ни в каком отношении к старой формуле.

И на этой-то точке зрения до сих пор еще в общем стоит, к сожалению, элементарное преподавание.

В противоположность этому, я хотел бы особенно подчеркнуть то обстоятельство, что это тригонометрическое решение является не чем иным, как применением изложенного выше общего метода к вычислению корней из комплексных величин. Оно получается самым естественным образом, если сделать формулу Кардана при комплексном подрадикальном выражении в кубическом корне столь же удобной для численного вычисления, как это делают в школе для вещественных выражений. В действительности это получается в таком виде. Мы предполагаем, следовательно,

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0,$$

так что непременно должно быть $p < 0$. Переписывая затем первый кубический корень выражения (2) в таком виде:

$$\sqrt[3]{\frac{q}{2} + i\left|\sqrt{-\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}\right|}$$

замечаем, что его модуль (как положительный кубический корень из модуля $\sqrt{-p^3/27}$ подкоренной величины) равен $\left|\sqrt{-p/3}\right|$; но так как произведение его на второй кубический корень должно как раз равняться $-\frac{p}{3}$, то этот второй корень должен, во всяком случае, иметь комплексное значение, сопряженное с первым корнем, а сумма обоих радикалов — решение кубического уравнения — должна равняться поэтому их удвоенной вещественной части:

$$x_1,\ x_2,\ x_3 = 2R\left(\sqrt[3]{\frac{q}{2} + i\left|\sqrt{-\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}\right|}\right)^{1)}.$$

[1]) R обозначает „вещественная часть".

Теперь применим в точности общий прием, описанный на странице 200 и сл. Пишем подкоренное количество кубического корня, отделяя модуль:

$$\left|\sqrt{-\frac{p^3}{27}}\right| \cdot \left(\frac{q/2}{\left|\sqrt{-p^3/27}\right|} + i\,\frac{\left|\sqrt{-q^2/4-p^3/27}\right|}{\left|\sqrt{-p^3/27}\right|}\right),$$

и определяем φ из уравнений:

$$\cos\varphi = \frac{q/2}{\left|\sqrt{-p^3/27}\right|},\ \sin\varphi = \frac{\left|\sqrt{-q^2/4-p^3/27}\right|}{\left|\sqrt{-p^3/27}\right|}.$$

Для кубичного корня находим, так как положительный корень третьей степени из $\left|\sqrt{-p^3/27}\right|$ равен $\left|\sqrt{-p/3}\right|$:

$$\left|\sqrt{-p/3}\right| \cdot \left(\cos\frac{\varphi}{3} + i\sin\frac{\varphi}{3}\right);$$

принимая же во внимание, что в выражение φ входит слагаемым неопределенное кратное 2π, находим:

$$x_{k+1} = \left|\sqrt{-p/3}\right| \cdot \cos\frac{\varphi + 2k\pi}{3}\ (k = 0, 1, 2).$$

А это как раз обычный вид тригонометрического решения.

Позвольте сделать по этому поводу еще одно замечание относительно выражения „casus irreducibilis". Здесь слово „irreducibilis" (неприводимый) употреблено в совершенно другом смысле сравнительно с его нынешним употреблением и с тем смыслом, в котором я часто уже пользовался им в настоящих лекциях; здесь оно должно обозначать, что решение кубического уравнения не может быть сведено к извлечению кубических корней из вещественных чисел, — а это не имеет ничего общего с современным значением этого слова. Вы видите, как именно в этой области неудачное обозначение и всеобщая боязнь комплексных чисел создали, во всяком случае, возможность для множества недоразумений. Я бы хотел, чтобы мои слова могли способствовать тому, чтобы устранить эти недоразумения, по крайней мере, в вашей среде.

Попытаемся теперь вкратце ориентироваться в том, как достигается униформизирование посредством трансцендентных функций в случае других нормальных уравнений. Начнем с уравнения диэдра:

$$z^n + \frac{1}{z^n} = 2w.$$

Здесь достаточно попросту положить

$$w = \cos\varphi,$$

и уравнение — как это видно сразу на основании формулы Муавра — будет тождественно удовлетворяться при

$$z = \cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}.$$

Так как все значения $\varphi + 2k\pi$ и $2k\pi - \varphi$ дают для w одно и то же значение, то эта формула действительно при каждом w доставляет $2n$ корней z, которые можно написать в таком виде:

$$z = \cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} \pm i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\ (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

При уравнениях октаэдра, тетраэдра и икосаэдра этих „элементарных" трансцендентных функций оказывается недостаточно, но зато можно получить совершенно аналогичное решение с помощью эллиптических модулярных функций. Хотя этого и нельзя отнести к элементарной математике, но я все же хочу указать, по крайней мере, формулы, относящиеся к икосаэдру [1]). Эти формулы находятся в самой тесной связи с решением общего уравнения пятой степени посредством эллиптических функций, о котором всегда упоминается в учебниках; о нем я тоже хочу сказать несколько пояснительных слов. Уравнение икосаэдра имело такой вид (стр. 189—190):

$$w = \frac{\varphi_{20}(z)^3}{\psi_{12}(z)^5}.$$

Отождествим w с абсолютным инвариантом J из теории эллиптических функций и станем рассматривать послед-

---

[1]) См. ст. Клейна в „Mathem. Annalen", Bd. XIV, S. 111, 1878/1879, также „Собр. мат. сочинений", т. III, стр. 13, 1923, а также „Лекции об икосаэдре", стр. 131.

ний как функцию отношения периодов $\omega = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ (в обозначении Якоби $\frac{iK'}{K}$), т. е. положим:

$$w = J(\omega) = \frac{g_2^3(\omega_1, \omega_2)}{\Delta(\omega_1, \omega_2)},$$

где g_2 и Δ означают известные играющие большую роль трансцендентные формы (—4)-го и (—12)-го измерения относительно ω_1 и ω_2. Если введем еще обычно употребляемое сокращенное обозначение Якоби

$$q = e^{i\pi\omega} = e^{-\pi\frac{K'}{K}},$$

то корни z уравнения икосаэдра представятся в виде такого частного двух ϑ-функций:

$$z = -q^{\frac{8}{5}} \frac{\vartheta_1(2\pi\omega, q^5)}{\vartheta(\pi\omega, q^5)}.$$

Принимая во внимание бесконечную многозначность функции $\omega(w)$, определяемой из первого уравнения, можно показать, что эта формула действительно доставляет при каждом w по 60 корней уравнения икосаэдра.

7. Разрешимость в радикалах.

Одного вопроса в теории нормальных уравнений я еще не затрагивал. Представляют ли наши нормальные уравнения вообще что-либо алгебраически существенно новое и нельзя ли их свести одно к другому и, в частности, к ряду двучленных уравнений? Другими словами: можно ли решение z этих уравнений выразить посредством конечного числа последовательных извлечений корня?

Что касается, прежде всего, уравнений диэдра, тетраэдра и октаэдра, то с помощью алгебраической теории легко убедиться в том, что их возможно свести к двучленным уравнениям. Достаточно показать это на примере уравнения диэдра:

$$z^n + \frac{1}{z^n} = 2w.$$

Если положить

$$z^n = \zeta,$$

то уравнение принимает вид:

$$\zeta^2 - 2w\zeta + 1 = 0;$$

а отсюда непосредственно следует:

$$\zeta = w \pm \sqrt{w^2 - 1},$$

и следовательно,

$$z = \sqrt[n]{w \pm \sqrt{w^2 - 1}},$$

что и представляет искомое решение в радикалах.

Между тем для уравнения икосаэдра подобное решение в радикалах невозможно, так что это уравнение определяет некоторую существенно новую алгебраическую функцию. Я покажу вам одно особенно наглядное доказательство этого утверждения, которое я недавно опубликовал в 61 томе „Mathem. Annalen“ [1]; оно основано на хорошо нам известном в теории функций построении функции икосаэдра $z(w)$. Я пользуюсь при этом только следующей известной леммой Абеля, доказательство которой вы можете найти в любом учебнике алгебры: *Если алгебраическое уравнение разрешимо с помощью ряда радикалов, то каждый входящий в это выражение радикал может быть представлен в виде рациональной функции всех корней первоначального уравнения.*

Применим теперь все это, в частности, к уравнению икосаэдра. Итак, если допустить, что его корень z выражается с помощью ряда извлечений корня из коэфициентов уравнения, т. е. из рациональных функций от w, — а мы покажем, что это допущение ведет к противоречию, — то каждый входящий в выражения корней радикал выражает некоторую рациональную функцию 60 корней уравнения:

$$R(z_1, z_2, \ldots, z_{60}).$$

Но так как все корни уравнения икосаэдра получаются из какого-нибудь одного из них z с помощью линейных подстановок, то можно вместо последнего выражения написать просто рациональную функцию $R(z)$ от одного

[1]) Стр. 369—371: „Beweis für die Nichtauflösbarkeit der Ikosaedergleichung durch Wurzelzeichen“. Ср. также „Собр. сочинений“, т. II, стр. 385.

только z. Представим себе это $R(z)$ как функцию от w, которая получится, если вместо z подставить 60-значную функцию икосаэдра $z(w)$. Ввиду того, что каждый обход в плоскости w, который возвращает z к его начальному значению, необходимым образом приводит и функцию $R(z)$ к ее первоначальному значению, то R может иметь разветвления только в местах $w = 0, 1, \infty$, в которых разветвляется и $z(w)$; вместе с тем число листов поверхности Римана для R, которые циклически сходятся в каждом таком месте, должно быть делителем соответствующего числа для $z(w)$, которое, как мы знаем, равно соответственно 3, 2 и 5. Всякая рациональная функция $R(z)$ одного из корней уравнения икосаэдра и, следовательно, всякий радикал, входящий в предполагаемое решение, может, в качестве функции от w, иметь разветвления, — если только она их вообще имеет, — лишь в точках $w = 0$, $w = 1$, $w = \infty$, а именно: в данном случае в точке 0 должно сходиться по 3 листа ее римановой поверхности, в точке 1 по 2 листа и в точке ∞ по 5 листов, так как числа 2, 3, 5 не имеют других делителей, кроме 1.

Теперь мы постараемся показать, что мы необходимо должны притти к противоречию с этим результатом: с этой целью рассмотрим самый внутренний радикал, какой только входит в допущенное нами выражение для $z(w)$. Он должен, во всяком случае, представлять собой корень из рациональной функции $P(w)$, и мы можем считать его показатель простым числом p, так как всякий другой радикал можно составить из ряда корней с простыми показателями. Кроме того, $P(w)$ не может быть p-степенью рациональной функции $s(w)$ от w, ибо иначе наш радикал был бы вообще излишен, и мы могли бы отнести наши рассуждения к ближайшему действительно необходимому знаку корня.

Посмотрим же, какие разветвления может иметь этот радикал $\sqrt[p]{P(w)}$; для этого наиболее удобно написать в однородном виде:

$$P(w) = \frac{g(w_1, w_2)}{h(w_1, w_2)},$$

где g, h обозначают формы одного и того же измерения

в однородных переменных w_1, w_2 $\left(w = \frac{w_1}{w_2}\right)$. Согласно основной теореме алгебры можно функции g и h разбить на линейные множители, что дает:

$$P(w) = \frac{l^{\alpha} \cdot m^{\beta} \cdot n^{\gamma} \ldots}{l'^{\alpha'} \cdot m'^{\beta'} \cdot n'^{\gamma'} \ldots},$$

где ввиду равенства измерений числителя и знаменателя

$$\alpha + \beta + \gamma + \ldots = \alpha' + \beta' + \gamma' + \ldots$$

Ясно, что все показатели $\alpha, \beta, \ldots, \alpha', \beta', \ldots$ не могут делиться на p, ибо иначе P представляло бы полную p-ю степень; с другой же стороны, агрегат всех показателей $\alpha + \beta + \ldots - \alpha' - \beta' - \ldots$ равен нулю, а потому делится на p; вследствие этого не может быть, чтобы только одно из этих чисел не делилось на p, т. е. таких чисел (не делящихся на p) должно быть, по крайней мере, два. Поэтому корни соответствующих линейных множителей должны, наверное, быть такими местами разветвления для $\sqrt[p]{P(w)}$, в которых циклически сходится по p листов. Но это стоит в противоречии с установленным выше положением, которое должно, конечно, иметь место и для $\sqrt[p]{P(w)}$. В самом деле, мы там перебрали все возможные разветвления и среди них мы не нашли двух с равным числом сходящихся листов. Таким образом наше допущение оказывается ложным, и **уравнение икосаэдра, во всяком случае, не разрешимо в радикалах.**

Это доказательство существенным образом основано на том, что характерные для икосаэдра числа 3, 2, 5 не имеют общего делителя. Когда же, наоборот, общий делитель имеется, как например в случае чисел 3, 2, 4 для октаэдра, то возможны такие рациональные функции $R(z(w))$, которые в двух местах представляют однородные разветвления, например функция, у которой сходится по два листа в точках 1 и ∞; такие функции действительно можно представить в виде корней из рациональной функции $P(w)$. Таким образом обнаруживается **разрешимость в радикалах уравнений октаэдра**

и тетраэдра (с числами 3, 2, 3), а также диэдра (2, 2, n).

Я хотел бы указать здесь вообще на то, как сильно отстала от успехов современной науки та терминология, которая царит в широких математических кругах. Слово „корень“ теперь употребляют почти всегда в двояком смысле: во-первых, для обозначения решения всякого алгебраического уравнения и, во-вторых, для обозначения решения именно двучленного уравнения. Это словоупотребление ведет начало, конечно, с тех времен, когда занимались исключительно двучленными уравнениями. В настоящее время оно является, если и не прямо-таки вредным, то, во всяком случае, довольно неудобным. В гораздо большей степени дает повод к недоразумениям другое обозначение, сохранившееся из элементов алгебры, согласно которому алгебраическое уравнение, которое неразрешимо в радикалах, т. е. которое не сводится к двучленным уравнениям, называют **неразрешимым алгебраически**. Это стоит в самом резком противоречии с современным значением слова „алгебраический“. В настоящее время алгебраически разрешимым называют такое уравнение, которое оказывается возможным свести к цепи таких возможно простых уравнений, для которых зависимость решений от параметров, взаимная связь различных значений корней и т. д. известны с такою же полнотой, как это имело место с давних пор для двучленного уравнения; но это отнюдь не должны быть непременно двучленные уравнения. В этом смысле мы можем отнести уравнение икосаэдра к числу тех, которые вполне разрешаются алгебраически, ибо все наши рассуждения показали, что мы можем построить их теорию, удовлетворяя всем указанным требованиям. То обстоятельство, что оно неразрешимо в радикалах, делает его, скорее, особенно интересным, так как вследствие этого оно является подходящим нормальным уравнением, к которому можно пытаться свести другие уравнения, тоже неразрешимые алгебраически в старинном смысле слова, чтобы вполне овладеть и их решением.

Это последнее замечание приводит нас к последнему параграфу настоящей главы.

8. Сведение общих уравнений к нашим нормальным уравнениям

Можно показать, что самое общее уравнение

третьей степени сводится к уравнению **диэдра** при $n = 3$,

четвертой степени сводится к уравнению **тетраэдра** или **октаэдра**,

пятой степени сводится к уравнению **икосаэдра**.

Этот результат представляет самый последний триумф правильных тел, которым с самого начала истории математики все снова и снова приходилось играть важную роль.

Чтобы сделать для вас понятнее смысл моего общего утверждения, я проведу его несколько подробнее для простейшего случая — для уравнения третьей степени, — впрочем, без полного доказательства формул. Представим себе кубическое уравнение снова в приведенной форме:

$$x^3 + px - q = 0. \qquad (1)$$

Пусть x_1, x_2, x_3 обозначают его решения; станем искать такую рациональную функцию z этих решений, которая при 6 перестановках этих трех величин испытывает как раз 6 линейных подстановок диэдра для $n = 3$, т. е. принимает значения:

$$z,\ \varepsilon\cdot z,\ \varepsilon^2\cdot z,\ \frac{1}{z},\ \frac{\varepsilon}{z},\ \frac{\varepsilon^2}{z}\ \left(\text{где } \varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{3}}\right).$$

Легко видеть, что функция

$$z = \frac{x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon^2 x_3}{x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon x_3} \qquad (2)$$

удовлетворяет этим условиям. Принадлежащая диэдру функция $z^3 + \frac{1}{z^3}$ этой величины должна, таким образом, оставаться неизменной при всех перестановках x_k, так как она остается без изменений при 6 линейных подстановках z; следовательно, ее можно, на основании известной теоремы алгебры, представить в виде рациональной функции коэфициентов уравнения (1), а именно вычисление дает:

$$z^3 + \frac{1}{z^3} = -27\frac{q^2}{p^3} - 2. \qquad (3)$$

Если же, наоборот, известно решение этого уравнения диэдра и если z есть один из его корней, то можно по выражению (2) с помощью известных соотношений:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = p, \quad x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = q$$

выразить рационально три значения x_1, x_2, x_3 через z, p, q, а именно оказывается, что

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= -\frac{3q}{p} \cdot \frac{z(1+z)}{1+z^3}, \\ x_2 &= -\frac{3q}{p} \cdot \frac{\varepsilon z(1+\varepsilon z)}{1+z^3}, \\ x_3 &= -\frac{3q}{p} \cdot \frac{\varepsilon^2 z(1+\varepsilon^2 z)}{1+z^3}. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Таким образом, если разрешено уравнение диэдра (3), то эти формулы дают непосредственно решение кубического уравнения (1).

Совершенно аналогично получается сведение наиболее общего уравнения четвертой и пятой степени. Уравнения оказываются, конечно, несколько длиннее, но в сущности не более трудными; новым является то, что параметр w нормального уравнения, который прежде выражался рационально через коэфициенты уравнения $\left(2w = -27\frac{q^2}{p^3} - 2\right)$, теперь содержит еще и квадратные корни. Вы можете найти очень подробное изложение этой теории для уравнения пятой степени и, соответственно, для икосаэдра во второй части моих лекций об икосаэдре и притом в таком виде, что не только приводится вывод формул, но, кроме того, всегда указываются внутренние основания, приводящие к этим уравнениям.

Позвольте мне сказать еще несколько слов о том положении, которое эти построения занимают по отношению к обыкновенно излагаемой теории уравнений третьей, четвертой и пятой степени. Прежде всего, обычные решения уравнений третьей и четвертой степени можно, конечно, получить из наших формул с помощью соответствующих вычислений, пользуясь решением в радикалах уравнений диэдра, октаэдра и тетраэдра.

Что же касается уравнений пятой степени, то, к сожалению, в учебниках обыкновенно ограничиваются

констатированием того отрицательного результата, что такое уравнение невозможно решить с помощью ряда радикалов, присоединяя к этому еще туманное указание на то, что решение становится возможным посредством эллиптических функций, — точнее следовало бы сказать: эллиптических модуль-функций. Я отношусь отрицательно к такому изложению, так как оно дает совершенно неправильное противоположение и служит скорее помехой правильному пониманию положения вещей, чем способствует ему. В действительности, резюмируя все, к чему мы пришли, мы должны сказать так, — отделяя алгебраическую часть от аналитической:

1. Хотя и невозможно свести уравнение пятой степени, данное в общем виде, к двучленным уравнениям, но зато удается — и в этом именно и заключается собственно задача алгебраического решения — *свести его к уравнению икосаэдра* как к простейшему нормальному уравнению.

2. Уравнение икосаэдра, в свою очередь, можно разрешить посредством *эллиптических модуль-функций*; это является пригодным для численного вычисления полным аналогом решения двучленных уравнений посредством логарифмов.

Это составляет полное решение проблемы уравнения пятой степени. В самом деле, когда что-либо не удается на обычном пути, то не должно сразу отказываться от дальнейших попыток и удовлетворяться констатированием невозможности, но надо стараться подойти к вопросу с такой стороны, чтобы можно было его разрабатывать дальше. Математическая мысль, как таковая, никогда не имеет конца, и если вам кто-нибудь скажет, что в некотором пункте прекращается математическое понимание, то будьте уверены, что там как раз должна найти свое место наиболее интересная постановка вопроса.

В заключение я хочу указать на то, что эти теории отнюдь не заканчиваются на уравнениях пятой степени; напротив того, можно и для уравнений шестой и высших степеней развить вполне аналогичные теории, прибегая к помощи правильных тел в пространстве многих измерений. Если вы желаете ближе ознакомиться с этими теориями, то обратитесь к моей статье „О решении

общего уравнения пятой и шестой степени" („Ueber die Auflösung der allgemeiner Gleichung 5 und 6 Grades". Journ. f. reine u. angew. Math., 129 (1905), pag. 151 ff; „Math. Ann"., 61, pag. 50 ff., 1905).

Решение уравнений шестой степени, соответственно приведенным в тексте принципам сведения уравнений пятой степени к теории икосаэдра, было в связи с упомянутой моей работой 1905 г. успешно исследовано Горданом (P. Gordan) в двух работах в 61-м (1905, стр. 50) и 68-м (1910, стр. 1) томах журнала „Mathematische Annalen". Упрощенную и продолженную дальше разработку этой проблемы содержит работа А. Кобля (A. B. Coble) „Mathematische Annalen", 70, стр. 337, 1911 [1].

---

[1]) См. также Klein, Gesam. Mathem. Abhandlungen Bd. II, стр. 502-503.

АНАЛИЗ.

I. ЛОГАРИФМ И ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ.

Теперь, во второй половине семестра, мы займемся тем, что подвергнем отдельные, наиболее важные, с нашей точки зрения, главы анализа такому же обсуждению, какому раньше мы подвергли арифметику и алгебру. Речь пойдет, главным образом, об элементарных трансцендентных функциях, которые, действительно, играют большую роль в школьном преподавании: это — показательная функция (соответственно логарифм) и тригонометрические функции.

Прежде всего я хочу напомнить известный всем вам ход изложения этого вопроса в школе и его продолжение, примыкающее к так называемой систематике алгебраического анализа.

1. Систематика алгебраического анализа.

Исходят от степени $a = b^c$ и затем последовательно переходят от целых положительных показателей c к целым отрицательным и, наконец, к дробным значениям c; этим самым понятие корня включается в обобщенное понятие о степени. Не входя в подробности свойств степеней, отмечу только правило умножения:

$$b^c \cdot b^{c'} = b^{c+c'},$$

которое сводит перемножение двух чисел к сложению их показателей. Возможность такого сведения, которое, как известно, лежит в основании вычислений с помощью логарифмов, формально обусловливается тем, что основные законы умножения и сложения во многом совпадают, а именно, оба действия коммутативны и ассоциативны.

Обращение действия возведения в степень приводит к логарифму: c называют **логарифмом** a **при основании** b:

$$c = \lg_b a.$$

Но уже здесь появляется ряд затруднений существенного характера, мимо которых в большинстве случаев проходят молча, не разъясняя их как следует, и которые мы именно поэтому постараемся вполне себе выяснить. При этом оказывается удобнее ввести вместо a и c, взаимную зависимость которых мы намерены изучать, обычные обозначения переменных x, y, так что наши основные равенства принимают такой вид:

$$x = b^y, \quad y = \lg_b x.$$

Начнем с того, что основание b всегда предполагается **положительным**; при отрицательном b переменная x принимала бы для целых значений y то положительные, то отрицательные значения, а при рациональных y она принимала бы множество раз даже мнимые значения, и совокупность этих пар значений x, y не могла бы образовать непрерывной кривой. Но и при $b > 0$ невозможно обойтись без соглашений, которые, на первый взгляд, кажутся произвольными. В самом деле, при рациональном $y = \frac{m}{n}$ (где m, n — взаимно простые числа), как известно, значение $x = b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{b^m}$ определено; но этот корень имеет n значений, и, если даже ограничиться вещественными числами, то все же при четном n он имеет два значения. Первое соглашение и состоит в том, что мы под x всегда будем разуметь **положительное значение корня** или так называемое **главное значение**. Значение этого условия мы исследуем с помощью общеизвестного изображения логарифмической кривой $y = \lg x$, которым я хочу воспользоваться уже здесь ради большей ясности (фиг. 61).

Если y пробегает всюду плотное множество рациональных чисел, то положительным главным значениям абсциссы $x = b^y$ отвечает на нашей кривой всюду плот-

ное множество точек. Если бы мы стали отмечать при четном знаменателе n (у показателя y) каждый раз и соответствующие отрицательные значения x, то получилось бы, можно сказать, „вдвое менее плотное", но все же всюду плотное множество точек на зеркальном изображении нашей кривой по отношению к оси y ($y = \lg(-x)$). Представляется далеко не ясным, почему в том случае, если давать y всевозможные вещественные, в том числе и иррациональные значения, можно именно главные значения справа соединять в одну непрерывную правильно идущую кривую, и нельзя ли — и почему именно нельзя — дополнить таким же образом и отрицательные значения слева.

Фиг. 61.

Мы увидим, что вполне понять все это мы сможем лишь с помощью более глубоких средств теории функций, какими не может располагать школа. Вследствие этого в школе отказываются от более глубокого понимания положения вещей и большей частью довольствуются тем, конечно, весьма убедительным для ученика, авторитетным утверждением, что должно брать $b > 0$ и положительные, главные значения корней и что все иное неправильно. На этом основано то утверждение, что логарифм есть однозначная функция, определенная только для положительных значений аргумента.

Когда теория логарифма доведена до этого пункта, ученик получает в руки таблицы логарифмов и должен научиться пользоваться ими для практических вычислений. При этом возможны, конечно, и такие школы, — в мои школьные годы это было общим явлением, — в которых не особенно распространяются о том, как именно вычислены такие таблицы. Само собой разумеется, что мы должны самым резким образом осудить такой грубый утилитаризм, игнорирующий высшие принципы обучения. Но теперь большей частью уже говорят о вычислении логарифмов и во многих школах вводят с этой целью также учение о **натуральных логарифмах** и о разложении их в ряды.

Что касается первого вопроса, то, как известно, основанием натуральной системы логарифмов служит

$$e = \lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2{,}7182818\ \ldots$$

Это определение e и его употребление в качестве основания системы логарифмов большей частью помещают непосредственно в самом начале, в особенности — в подражание французам — в больших учебниках анализа, причем, конечно, отсутствует собственно наиболее ценный элемент, способствующий пониманию: объяснение того, почему принимают за основание как раз этот замечательный предел и почему получаемые при этом логарифмы называют натуральными. Точно так же и разложение в ряд появляется часто совершенно неожиданно; полагают попросту формально:

$$\lg(1+x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots,$$

вычисляют коэфициенты a_0, a_1, ... на основании известных свойств логарифма и доказывают, сверх того, еще сходимость ряда при $|x| < 1$. Но при этом опять-таки оставляют в стороне вопрос о том, как вообще приходят хотя бы к тому, что подозревают возможность разложения в ряд функций и притом еще столь произвольно составленной, какой является логарифм по школьному определению.

2. Историческое развитие учения о логарифме

Если мы хотим найти все те внутренние соотношения, о которых шла речь, и узнать глубже лежащие основания того, почему такие, повидимому, произвольные допущения все же приводят к разумным результатам, — короче говоря, если мы хотим действительно достичь полного понимания теории логарифма, то будет лучше всего проследить в общих чертах ход исторического развития этой теории. Вы увидите, что он нисколько не соответствовал изложенной выше школьной практике, но что последняя стоит к нему как бы в положении проекции, построенной из очень неблагоприятной точки.

Прежде всего приходится назвать одного немецкого математика XVI в. — шваба Михаэля Штифеля (Michael Stifel), который выпустил в Нюрнберге свою „Arithmetica integra" в 1544 г., т. е. в самом начале развития современной алгебры, за один год перед тем, как появилось, тоже в Нюрнберге, уже упомянутое выше сочинение Кардана. Эта книга, как и большинство книг, упомянутых ниже, имеется в нашей весьма богатой университетской библиотеке. В этой книге Штифеля вы встречаете впервые действия над степенями с любыми рациональными показателями, причем особенно подчеркивается правило умножения. Штифель дает даже (стр. 250), пожалуй первую, таблицу логарифмов, какая только существует, но, конечно, весьма рудиментарную: она содержит всего лишь целые числа от —3 до 6 в качестве показателей и рядом с ними соответствующие степени числа 2: $\frac{1}{8}$, ..., 64. Повидимому Штифель имел представление о значении дальнейшего развития этих идей, так как он замечает, что об этих замечательных числовых соотношениях можно было бы написать целую книгу.

Для того чтобы иметь возможность сделать логарифмы пригодными для практических вычислений, Штифелю недоставало еще одного важного вспомогательного средства, а именно десятичных дробей, так что лишь со времени изобретения последних — после 1600 г. стало возможным построение настоящих логарифмических таблиц. Первые таблицы принадлежат шотландцу Джону Неперу (John Napier или Neper), жившему от 1550 г. до 1617 г., истинному изобретателю логарифмов, придумавшему самое их название; эти таблицы появились в 1614 г. в Эдинбурге под заглавием: „Mirifici logarithmorum canonis descriptio" („Описание чудесного канона логарифмов"). О воодушевлении, вызванном этими замечательными таблицами, вы можете судить по тем забавным стихам, которые напечатаны в начале таблиц и в которых различные авторы воспевают отменные качества логарифмов. Впрочем, самый способ Непера для вычисления логарифмов был опубликован лишь после его смерти под названием „Mirifici logarithmorum canonis constructio" (Lugduni 1620; перепечатано в Париже в 18..5 г.).

В сущности натуральные логарифмы появились еще до Непера по поводу одного весьма важного успеха в картографии: открытие „меркаторской проекции" Герардом Меркатором (о оло 1550 г.) можно считать первым графическим открытием логирифмов [1]). Достаточно будет сослаться на III главу 2-й части II тома этих лекций, где выяснена связь меркаторской проекции с логарифмической функцией. Если хотят, не зная последней, вывести меркаторскую проекцию при помощи подходящего предельного перехода, то неявно появляется (натуральный) логарифм с совершенно такой же точки зрения, как у Непера из логарифмов Бюрги.

Что же касается работы Непера и Бюрги, то здесь указаны только их руководящие основные идеи; для полного вычисления своих таблиц они пользовались, конечно наряду с определением последовательных степеней числа $\left(1+\frac{1}{10^4}\right)$ и, соответственно, числа $\left(1-\frac{1}{10^7}\right)$ на основании разностных уравнений, также интерполяционными методами. Кроме того, Непер владел уже идеей предельного перехода к натуральным логарифмам в собственном смысле, т. е. — выражаясь современным языком — перехода к диференциальному уравнению

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}$$

именно он рассматривает движение, скорость которого растет пропорционально расстоянию от исходной точки; этим представлением он даже пользовался при вычислении своих таблиц. Подробное изложение вы найдете у Коппе: „Die Behandlung der Logarithmen und der Sinus im Unterricht" (Progr. d. Andreas-Realgymnasium, Berlin 1893), а также в одной работе того же автора в Sitzungsgerichte d. Berliner mathematischen Gesellschaft. Bd. 3 (1904) S, 48.

Независимо от Непера швейцарец Бюрги (Jobst Bürgi, 1552 — 1632) построил таблицы, которые он опубликовал впрочем, лишь в 1620 г. в Праге под заглавием „Progresstabuln". Для нас, гёттингенцев, Бюрги представляет особый интерес, как земляк, так как он долгое время

[1]) По письменному сообщению Коппе. (M. Koppe, Berlin).

жил в Касселе [1]). Вообще, Кассель и в особенности его старая обсерватория играли весьма важную роль в истории развития арифметики, астрономии, оптики перед изобретением исчисления бесконечно малых — подобно тому как впоследствии имел значение Ганновер, как местожительство Лейбница. Таким образом вблизи от нас находится почва, представлявшая историческое значение для нашей науки еще задолго до того, как был основан наш университет.

Представляется весьма поучительным присмотреться ближе к ходу идей у Непера и Бюрги. Оба исходят из значений $x = b^y$ для целых y и хотят устроить так, чтобы числа x лежали по возможности гуще, чтобы подойти, таким образом, возможно ближе к конечной цели — найти для каждого числа его логарифм. Теперь в школе достигают этого с помощью перехода к дробному показателю y, о котором шла речь выше. Но Непер и Бюрги избегают всех тех затруднений, которые встречаются на этом пути, благодаря тому, что с помощью гениальной интуиции подходят к вопросу сразу же с верной стороны, а именно, им приходит в голову простая, но счастливая мысль взять за основание b число, очень близкое к единице, ибо при этом действительно даже последовательные целые степени b лежат очень близко друг к другу. Бюрги принимает

$$b = 1{,}0001,$$

между тем как Непер пользуется числом, меньшим единицы:

$$b = 1 - 0{,}0000001 = 0{,}9999999,$$

подходя, таким образом, еще ближе к единице. Причина этого отклонения Непера от теперешнего обычая заключается в том, что он наперед имел в виду применение к тригонометрическим вычислениям; действительно, там ведь прежде всего имеют дело с логарифмами правильных дробей (синуса и косинуса), которые при $b > 1$ отрицательны, а при $b < 1$ положительны. Но для обоих исследователей является общим тот главный факт, что они пользуются только целыми степенями этого числа b

[1]) Ближайший к Гёттингену большой город (в 50 *км*). Ганновер — центр провинции, к которой принадлежит Гёттинген.

и благодаря этому совершенно избавляются от многозначности, которая стесняла нас выше. Вычислим по системе Бюрги степени для двух соседних показателей y и $y+1$:

$$x = (1{,}0001)^y, \quad x + \Delta x = (1{,}0001)^{y+1}.$$

Вычитание дает:

$$\Delta x = (1{,}0001)^y \, (1{,}0001 - 1) = x \cdot \frac{1}{10^4},$$

или, если вместо разностей показателей 1 писать вообще Δy.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{10^4}{x} \qquad (1a)$$

Получается, таким образом, уравнение в конечных разностях для логарифмов Бюрги, которое сам Бюрги непосредственно применяет при вычислении своих таблиц; определив, какое значение x соответствует некоторому y, Бюрги находит следующее значение, соответствующее $(y+1)$, посредством прибавления $\frac{x}{10^4}$. Точно так же оказывается, что логарифмы Непера удовлетворяют разностному уравнению:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{10^7}{x}. \qquad (1b)$$

Чтобы убедиться в близком родстве обеих систем, стоит только рассмотреть вместо y то числа $\frac{y}{10^4}$, то числа $-\frac{y}{10^7}$, другими словами, переставить десятичную запятую в логарифмах; обозначая опять новые числа просто через y, получаем каждый раз числовой ряд удовлетворяющий одному и тому же разностному уравнению:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x}, \qquad (2)$$

в котором y изменяется скачками, в одном случае в 0,0001, а в другом случае в — 0,0000001.

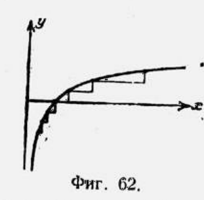
Если мы позволим себе ради удобства воспользоваться изображением непрерывной показательной кривой, — собственно говоря, к этой кривой мы должны были бы притти в результате наших рассуждений, — то мы сможем

дать в нескольких словах наглядное описание расположения точек (x, y), соответствующих числовому ряду Непера или Бюрги: это — вершины лестницы с постоянной высотой ступени $\Delta y = 0{,}0001$ и соответственно $\Delta y = 0{,}0000001$, вписанной в показательную кривую:

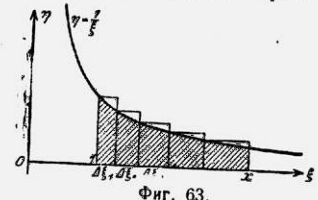
$$x = (1{,}0001)^{10\,000 y} \text{ и соответственно } x = (0{,}9999999)^{10\,000\,000 y}, \qquad (3)$$

как схематически изображено на фиг. 62.

Другое геометрическое толкование, которое не предполагает знания показательной кривой и тем не менее лучше покажет нам естественный путь к ее построению,



Фиг. 62.



Фиг. 63.

получается, если заменить разностное уравнение следующим суммованием (как бы „проинтегрировать“ его):

$$y = \sum_{1}^{x} \frac{\Delta \xi}{\xi} \qquad (4)$$

суммирование здесь надо понимать в том смысле, что ξ изменяется от 1 до x скачками такой величины, что соответствующее $\Delta \eta = \frac{\Delta \xi}{\xi}$ постоянно равно 10^{-4} или, соответственно, -10^{-7}, что дает $\Delta \xi = \frac{\xi}{10^4}$ или соответственно $\Delta \xi = -\frac{\xi}{10^7}$. Этот процесс нетрудно описать геометрически: надо начертить в плоскости $\xi\eta$ гиперболу $\eta = \frac{1}{\xi}$ и отметить на оси ξ, начиная от точки $\xi = 1$, все те точки, которые получаются, если последовательно прибавлять по $\Delta \xi = \frac{\xi}{10^4}$ (для логарифмов Бюрги). Над каждым таким отрезком

(между двумя соседними точками) построим прямоугольник с высотой $\frac{1}{\xi}$, одной из вершин которого служит точка гиперболы, имеющая абсциссу ξ; все такие прямоугольники имеют одну и ту же площадь $\Delta\xi = \frac{1}{\xi} = \frac{1}{10^4}$ (фиг. 63). В таком случае равенство (4) показывает, что логарифм Бюрги равен как раз сумме всех этих вписанных в гиперболу прямоугольников, лежащих между 1 и x. То же имеет место и для логарифмов Непера.

Последнее истолкование приводит нас непосредственно к натуральным логарифмам, если вместо суммы прямоугольников рассматривать площадь, ограниченную самою гиперболою между ординатами $\xi = 1, \xi = x$ (заштрихованную на чертеже); это выражается, как известно, следующей формулой:

$$\ln x = \int_1^x \frac{d\xi}{\xi}.$$

Таков же был и действительный исторический путь: а именно, решительный шаг был сделан около 1650 г., когда аналитическая геометрия составляла уже общее достояние математиков и нарождающееся исчисление бесконечно малых приводило к квадратурам известных кривых.

Если мы принимаем это определение натурального логарифма, то мы должны, конечно, прежде всего убедиться в том, что он действительно обладает тем основным свойством, что умножение чисел (numeri) заменяется сложением логарифмов, или, выражаясь современным языком, мы должны показать, что определяемая площадью гиперболы функция

$$f(x) = \int_1^x \frac{d\xi}{\xi}$$

подчиняется простой теореме сложения:

$$f(x_1) + f(x_2) = f(x_1 \cdot x_2).$$

В самом деле, при вариации переменных x_1, x_2 обе части получают по самому определению интеграла приращения $\frac{dx_1}{x_1} + \frac{dx_2}{x_2}$ и, соответственно, $\frac{d(x_1 x_2)}{x_1 x_2}$, которые, таким образом, равны между собой, поэтому $f(x_1) + f(x_2)$ и $f(x_1 \cdot x_2)$ могут отличаться только на постоянную C; но последняя оказывается равной нулю, так как при $x_1 = 1$ имеем: $f(1) + f(x_2) = f(x_2)$, ибо $f(1) = 0$.

Чтобы найти „основание" полученных таким образом логарифмов, обратим наше внимание на то обстоятельство, что переход от ряда прямоугольников к площади, ограниченной гиперболой, можно получить, если подвигаться по оси абсцисс каждый раз на $\Delta\xi = \frac{\xi}{n}$ вместо $\Delta\xi = \frac{\xi}{10^4}$ и давать n неограниченно возрастающие значения. Но это означает, что мы заменяем последовательность значений Бюрги $x = (1{,}0001)^{10\,000y}$ последовательностью $x = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{ny}$, где n пробегает ряд всех целых чисел. Согласно общему определению степени это можно выразить так: x есть y-я степень числа $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, а это делает весьма вероятным, что по выполнении предельного перехода $\lim\limits_{n=\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ станет основанием; это действительно как раз тот предел, который обыкновенно помещают в самом начале как определение числа e. Любопытно, что основание Бюрги $(1{,}0001)^{10\,000} = 2{,}718146...$ совпадает с e до третьего десятичного знака.

Посмотрим теперь, как развивалась исторически теория логарифма после Непера и Бюрги. Здесь прежде всего я должен указать следующее:

1. Упомянутый уже выше Меркатор один из первых стал пользоваться определением натурального логарифма посредством площади гиперболы; в своей книге „Logarithmotechnica", а также в некоторых статьях, помещенных в „Philosophical Transactions" Лондонской академии за 1667 и 1668 гг. он показывает, ис-

ходя, собственно говоря, из тех же соображений, которые я только что изложил на современном языке, что $f(x) = \int_1^x \frac{d\xi}{\xi}$ *отличается от обыкновенного логарифма с основанием* 10 — этим основанием уже тогда пользовались при вычислениях — *лишь постоянным множителем*, так называемым *модулем системы логарифмов*. Кроме того, он же ввел название *„натуральный логарифм“* или также *„гиперболический логарифм“*[1]). Но самой крупной заслугой Меркатора является то, что он *нашел степенной ряд для логарифма*, который он получает — по существу, — *выполняя в его интегральном изображении деление и интегрируя затем по частям*. Я уже отметил это выше (стр. 126), как шаг, проложивший в математике новый путь.

2. Там же я сообщил, что Ньютон воспользовался этими идеями Меркатора и обогатил их двумя новыми весьма ценными открытиями: *обобщенной теоремой бинома и методом обращения рядов*. Эти открытия находятся уже в одной юношеской работе Ньютона: „De analysi per aequationes numero terminorum infinitas“ [2]), которая была напечатана много позднее, но уже с 1669 г. была распространена в рукописи. В этой работе [3]) Ньютон выводит впервые из ряда Меркатора для $y = \ln x$ посредством его обращения ряд для показательной функции:

$$x = 1 + \frac{y}{1!} + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \dots$$

Таким образом число, натуральный логарифм которого равен единице, получается отсюда в таком виде:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

и с помощью функционального уравнения для логарифма нетрудно вполне строго притти к выводу, что для каждого рационального y, в смысле обыкновенного определения степени, x равен одному из значений e^y, а именно положительному, как мы еще увидим ниже. Таким образом функция $y = \ln x$ действительно представляет то, что, согласно обычному определению, следовало бы назвать „логарифмом x при основании e“, причем e здесь определено посредством ряда, а не как $\lim\limits_{n=\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

3. Более удобный способ получения показательного ряда имел возможность дать Брук Тейлор (Brook Taylor) установив в своем „Методе приращения“ [1]) общий принцип разложения в ряд, названный его именем; об этом ряде нам еще придется много говорить в последующем. Ему надо было только из соотношения, содержащегося в определении логарифма с помощью интеграла:

$$\frac{d \ln x}{dx} = \frac{1}{x},$$

вывести для обратной функции равенство:

$$\frac{de^y}{dy} = e^y;$$

после этого он имел возможность сразу написать ряд для показательной функции как частный случай его общего ряда (т. е. так называемого ряда Тейлора).

Мы уже видели выше (стр. 128), что за этой продуктивной эпохой последовала эпоха критики, которую можно назвать чуть ли не периодом морального угнетения; в течение этого периода математики стремились, главным образом, к тому, чтобы надежно обосновать вновь приобретенные результаты и отделить то, что могло оказаться неверным. Мы должны теперь ближе присмотреться к тому, как относились к показательной функции и к логарифму главные представители этого направления — Эйлер и Лагранж.

Начнем с „Введения в анализ бесконечно малых“ Эйлера [2]). Позвольте мне, прежде всего, отметить не-

---

[1]) „Phil. Trans“ III (1668), стр. 761.

[2]) I. Newton, Opuscula, Tom. I (Lausannae 1744), op. I. Впервые появилась в 1711 г.

[3]) Там же. стр. 20.

[1]) Methodus incrementorun, Londini 1715.

[2]) „Introductio in analisin infinitorum“ Lausannae 1748. Cap. VII, pag. 85 и сл. [Ср. также т. VIII (1923) немецкого издания сочинений Эйлера, выпущенного Ф. Рудио (F. Rudio), А. Крацером (A. Krazer) и П. Штекелем (P. Stäckel). В настоящее время подготовляется и русское издание „Introductio“.]

обычайный, поразительный анализ Эйлера, проявляемый им во всех его рассуждениях, хотя я должен заметить, что у Эйлера нет и следа той строгости, какая теперь обыкновенно требуется.

Эйлер начинает свои рассуждения с теоремы о биноме:

$$(1+k)^l = 1 + \frac{l}{1}k + \frac{l(l-1)}{1\cdot 2}k^2 + \frac{l(l-1)(l-2)}{1\cdot 2\cdot 3}k^3 + \ldots$$

для целого показателя l; при нецелом показателе Эйлер вообще не рассматривает бинома во „Введении". Это разложение Эйлер применяет к выражению:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{ny},$$

где n и y суть целые числа; заставляя n — при сохранении этого условия — возрастать до бесконечности и выполняя справа этот же процесс в каждом члене ряда отдельно Эйлер получает показательный ряд:

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \ldots,$$

где e определено как $\lim\limits_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Могут ли быть строго оправданы, в современном значении слова, отдельные шаги этого приема,— например, действительно ли сумма пределов членов ряда равна пределу суммы ряда,— обо всем этом Эйлер нисколько не заботится. Идея этого вывода ряда для показательной функции является, как вам известно, образцом для весьма многих курсов анализа, причем, во всяком случае, чем дальше, тем больше разрабатываются отдельные шаги сами по себе и особенное значение придается доказательству их правильности. О том, какое определяющее значение имела книга Эйлера для всего дальнейшего развития этих вещей, вы можете судить уже по одному тому, что от Эйлера ведет начало употребление буквы e для обозначения этого замечательного числа: „Ponamus autem brevitatis gratia pro numero hoc 2,71828... constanter litteram e..."[1]) читаем мы на стр. 90.

[1]) Примем ради краткости для этого числа 2,71828... постоянное обозначение — букву e".

Быть может, будет кстати здесь же упомянуть, что Эйлер дает непосредственно вслед за этим совершенно аналогичный вывод ряда для синуса и косинуса. При этом он исходит из разложения в ряд $\sin\varphi$ по степеням $\sin\frac{\varphi}{n}$ и заставляет n возрастать до ∞. Если построить это разложение на основании „формулы Муавра":

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = \left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)^n = \left(\cos\frac{\varphi}{n}\right)^n\cdot\left(1 + i\,\mathrm{tg}\frac{\varphi}{n}\right)^n,$$

то нетрудно понять, что применяемый Эйлером процесс представляет собой предельный переход для бинома. С другой стороны, в этом же месте[1]). Эйлер впервые употребляет букву π для обозначения того числа, для которого она с тех пор всегда употребляется.

Обратимся теперь к замечательному сочинению Лагранжа — к „Теории аналитических функций"[2]). И в этом случае приходится прежде всего отметить, что вопросами о сходимости Лагранж, если и занимается, то совершенно случайно и мимоходом. Мы уже знаем, что Лагранж рассматривает лишь такие функции, которые даны в виде степенных рядов, и определяет их производные вполне формально посредством степенных рядов, получаемых по определенным правилам из данного ряда. Поэтому ряд Тейлора

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \ldots$$

представляет для него только лишь результат формальной перегруппировки членов ряда для $f(x+h)$, расположенного первоначально по степеням $(x+h)$. Если он желает применить этот ряд к какой-нибудь определенной функции, то, конечно, он должен сперва, строго говоря, показать, что взятая функция принадлежит к числу „аналитических", т. е. что она вообще может быть разложена в степенной ряд.

[1]) „Introductio", стр. 93.

[2]) „Théorie des fonctions analytiques", Paris 1797. Перепечатано в издании Lagrange, Oeuvres, IX (Paris 1881); ср. в особенности Chap. III, pag. 34 и сл.

Лагранж начинает с рассмотрения функции $f(x) = x^n$ при рациональном n и определяет $f'(x)$ как коэфициент при h^1 в разложении $(x+h)^n$, представляя себе, что действительно вычислены первые два члена этого разложения; по тому же самому закону он сразу получает и $f''(x), f'''(x), \ldots$ и биномиальное разложение $(x+h)^n$ получается как частный случай тейлорова ряда для $f(x+h)$. При этом я особенно подчеркиваю, что Лагранж не разбирает отдельно случая иррациональных показателей n, но считает очевидным, что этот случай исчерпан, если приняты во внимание все рациональные значения n; представляется интересным отметить это ввиду того, что в настоящее время придают очень большое значение точной разработке подобных переходов.

Эти результаты Лагранж применяет к вполне аналогичному изучению функции $f(x) = (1+b)^x$; а именно, преобразуя биномиальный ряд для $(1+b)^{x+h}$, он находит $f'(x)$, как коэфициент при h, затем определяет по тому же закону $f''(x), f'''(x), \ldots$ и, наконец, пишет ряд Тейлора для $f(x+h) = (1+b)^{x+h}$; полагая $x = 0$, он получает искомый ряд для показательной функции.

Этот исторический обзор, в котором я, разумеется, мог назвать имена только первоклассных математиков, я хотел бы закончить тем, что вкратце отмечу те существенно новые течения, которые выступили в XIX в. Здесь я должен, прежде всего, указать на следующее:

1. В выработке точных понятий о сходимости бесконечных рядов и других бесконечных процессов первое место занимает Гаусс с его статьей 1812 г. о гипергеометрических рядах [1]); затем следует работа Абеля 1824 г. с биномиальном ряде [2]), между тем как Коши в двадцатых годах впервые публикует в своем „Курсе анализа“ [3]) исследования общего характера о сходимости рядов. Результат всех этих работ по отношению к рассматриваемым здесь рядам состоит в том, что все прежние разложения — поскольку они относились к области сходимости — были правильны, причем точные доказательства оказываются, конечно, очень сложными. Относительно подробностей этих доказательств в их современном виде я снова отсылаю интересующихся к „Алгебраическому анализу“ Буркгардта или к книге Вебера-Вельштейна.

2. Здесь же я должен упомянуть о точном обосновании анализа бесконечно малых в работах Коши, хотя подробно говорить об этом нам придется позже. Это обоснование сообщило тому изложению теории логарифмов, какое выработалось в XVII в., полную математическую точность.

3. Наконец, я должен упомянуть о той теории, которая одна только могла привести к полному пониманию логарифма и показательной функции, — о теории функций комплексного переменного, кратко называемой теперь „теорией функций“. Первым, кто ясно представлял себе основные черты этой теории, был опять-таки Гаусс, хотя он опубликовал об этом очень мало или даже почти ничего. Для нас интересно прежде всего письмо Гаусса к Бесселю от 18 декабря 1811 г., которое было опубликовано, конечно, лишь много позднее (Werke, Bd. III, pag. 90). В этом письме с поразительной ясностью определено значение интеграла $\int_1^x \frac{dz}{z}$ в комплексной плоскости и объяснено, почему он представляет бесконечно многозначную функцию. Впрочем, слава самостоятельного создания и первого опубликования теории комплексных функций и в этом отношении принадлежит Коши.

Результат этих исследований начала XIX в. в приложении к нашему специальному вопросу можно выразить приблизительно так: **определение натурального логарифма на основании квадратуры гиперболы обладает такою же строгостью, как и всякое другое определение, и даже более того: оно, как мы видели, превосходит другие определения простотой и наглядностью.**

[1]) Gauss, Disquisitiones generales circa seriem infinitam $1 + \frac{a \cdot b}{1 \cdot c} x + \ldots$, Comment. Societ. reg. Gotting. recent. Vol. II, 1813 или Werke, Bd. III. pag. 125

[2]) Crelles Journal f. d. r. u. a. Mathem., Bd. I, pag. 311—339. Также „Oswalds Klassiker“ № 71.

[3]) Cauchy, Cours d'analyse, P. 1: Analyse algebrique, Paris 1821 или „Oeuvres“, Ser. II, Term III (Paris 1897). Немецкий перевод, сделанный Ицыксоном (Itzksohn), выпущен в 1885 г.

3. Некоторые замечания о школьном преподавании.

Несомненно,— хотя и удивительно,— что это современное развитие идей, по существу, прошло совершенно бесследно для характера школьного преподавания, на что я уже неоднократно указывал. Там — в школе — и по сей день обходятся с помощью алгебраического анализа несмотря на все трудности и несовершенство последнего, избегая всякого применения исчисления бесконечно малых, хотя страх XVIII в. перед последними давно уже потерял всякий смысл. Причину указанного явления приходится искать в том обстоятельстве, что с самого начала XIX в. преподавание математики в школе и идущее вперед научное исследование потеряли всякое соприкосновение между собой; и этот факт представляется тем более удивительным, что как раз в первые десятилетия этого же столетия начинается впервые вообще специальная подготовка кандидатов в преподаватели математики. Я указывал уже во „Введении" на этот разрыв, который долгое время имел здесь место и препятствовал какой-либо реформе школьной традиции. Средняя школа всегда очень мало заботилась о том, как высшая школа будет строить свое здание на основах, даваемых ей средней школой, и часто довольствовалась такими определениями, которые, быть может, и были достаточны для ее целей, но оказывались несостоятельными перед лицом более серьезных требований. С другой же стороны, и высшая школа часто совершенно не дает себе труда точно примыкать к тому, что дано в средней школе; вместо этого она строит свою собственную систему, лишь изредка сокращая свой труд не всегда даже подходящим указанием: „это вы уже имели в школе".

В противоположность этому, интересно заметить, что те преподаватели высшей школы, которым приходится читать лекции для более широких кругов — для естественников и для техников,— сами собой пришли в своей практике к способу введения логарифмов, совершенно подобному тому, который я здесь рекомендую. В этом отношении я особенно рекомендую вашему вниманию „Учебник математики для студентов естественников и для

техников" Шефферса [1]). Там вы найдете на стр. 232 — 350 очень подробную теорию логарифма и показательной функции, которая вполне совпадает с нашим построением и к которой примыкает (стр. 351—407) подобная же теория тригонометрических функций. Я настойчиво рекомендую вам познакомиться с этой книгой; она написана мастерски и легко читается, так что вполне доступна и для менее способных. Весьма поучительно обратить внимание на тот педагогический такт, который обнаруживает Шефферс; посмотрите, скажем, — чтобы ограничиться одним примером,—как часто и настойчиво он указывает, что во всей теории логарифма лишь очень мало новых формул необходимо запомнить, между тем как все другие, если вы их хоть один раз поняли, каждый раз можно отыскать в книге; этим он постоянно поддерживает в читателе терпение даже среди громадного, повидимому, обилия нового материала. В одном только Шефферс отклоняется от моей тенденции: он, хотя и принимает школьное изложение как наперед данное, но строит свои рассуждения, не заботясь о том, что дала школа, полагая, что большинство из этого материала уже забыто. Но он очень далек от того, чтобы делать предложения по вопросу о реформе самого школьного преподавания, как это делаю я.

Подобные же вариации обычного способа изложения предлагают и другие авторы. Так, Жюль Таннери в своих „Элементах математики" определяет с самого начала логарифм посредством площади гиперболы; точно так же поступал еще в 1903 г. Bradshaw, как там же цитирует Таннери. Действительно, такой способ изложения представляет точное и последовательное проведение точки зрения „высшей" математики.

Включение в преподавание определения Непера-Бюрги при постоянной иллюстрации на конкретных примерах рекомендует, например, Коппе в своей упомянутой выше программе 1893 г.

Я хочу теперь еще раз в нескольких словах резюмировать, как мне представляется введение логарифма

[1]) Scheffers, Lehrbuch der Mathematik für Studierende der Naturwissenschaften und Technik, Leipzig 1905; 5-е изд., 1921 г.

в школе по этому простому и естественному способу. Основным принципом должно быть признание квадратуры уже известных кривых правильным источником для введения новых функций. Это, как я показал, соответствует, с одной стороны, историческому положению вещей, а с другой, методу, применяемому в высших частях математики (сравните, например, эллиптические функции). Следуя этому общему принципу, надо исходить из гиперболы $\eta = \frac{1}{\xi}$ и назвать логарифмом от x число измеряющее площадь, которая содержится между кривой и осью абсцисс, а с боков ограничена ординатами $\xi = 1$ и $\xi = x$ (фиг. 64). Передвигая вторую ординату, можно легко на основании геометрической интуиции составить себе качественное представление об изменении этой площади при изменении x и, следовательно, приблизительно построить кривую $y = \lg x$. Чтобы возможно просто получить функциональное уравнение логарифма, можно, например, исходить из равенства:

Фиг. 64

$$\int_1^x \frac{d\xi}{\xi} = \int_c^{cx} \frac{d\xi}{\xi},$$

которое получается при преобразовании $c\xi = \xi'$ переменных интегрирования; это равенство говорит, что площадь, заключенная между ординатами 1 и x, равна площади, заключенной между ординатами, в c раз более удаленными от начала c и cx. Этот факт легко сделать весьма наглядным геометрически, если обратить внимание на то, что величина площади должна оставаться неизменной, если передвигать ее под гиперболой и в то же время растягивать в такой же мере, в какой уменьшается высота. Но из этой теоремы вытекает непосредственно теорема сложения:

$$\int_1^{x_1} \frac{d\xi}{\xi} + \int_1^{x_2} \frac{d\xi}{\xi} = \int_1^{x_1} \frac{d\xi}{\xi} + \int_{x_1}^{x_1 \cdot x_2} \frac{d\xi}{\xi} = \int_1^{x_1 \cdot x_2} \frac{d\xi}{\xi}.$$

Мне бы очень хотелось, чтобы возможно скорее попробовали применить этот путь в школьной практике; решение вопроса о том, как должны быть построены детали этого изложения, следует, конечно, предоставить опытному преподавателю. Впрочем, в меранской программе мы еще не решались предложить этот путь в виде нормы.

Теперь, наконец, мы должны еще ориентироваться относительно того, как складывается наша теория, если мы становимся на точку зрения теории функций; это даст нам также полное освещение всех трудностей, затронутых ранее.

4. Точка зрения современной теории функций.

В дальнейшем изложении мы заменим y и x комплексными переменными:

$$w = u + iv \quad \text{и} \quad z = x + iy.$$

1. Логарифм определяется посредством интеграла:

$$w = \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}, \tag{1}$$

причем путем интегрирования может служить любая кривая в комплексной плоскости ζ, идущая от точки $\zeta = 1$ к точке $\zeta = z$ (фиг. 65).

2. Смотря по тому, обходит ли путь интегрирования вокруг точки $\xi = 0$ один раз, два раза... или же не обходит вовсе, интеграл принимает бесконечно много различных значений, так что $\ln z$ представляет бесконечно многозначную функцию. Определенное значение — так называемое главное значение $[\ln z]$ — получится, если разрезать плоскость, например, вдоль оси отрицательных вещественных чисел и установить, что путь интегрирования не должен переходить через этот разрез. Произвольным остается при этом только то, желаем ли мы получать отрицательные вещественные значения, подходя к линии разреза сверху или снизу; соответственно этому и логарифм получает чисто мнимую часть $+i\pi$ или $-i\pi$.

Из главного значения общее значение логарифма получается прибавлением произвольного кратного $2i\pi$:

$$\ln z = [\ln z] + 2ki\pi \quad (k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2 \ldots) \tag{2}$$

3. Из определения логарифма с помощью интеграла следует, что обратная ему функция $z = f(w)$ удовлетворяет диференциальному уравнению:

$$\frac{df}{dw} = f,$$

на основании которого можно сразу составить разложение f в степенной ряд:

$$z = f(w) = 1 + \frac{w}{1!} + \frac{w^2}{2!} + \frac{w^3}{3!} + \ldots$$

Так как этот ряд сходится для всякого конечного w, то отсюда можно заключить, что обратная функция однозначна и имеет только одну особенную точку $w = \infty$, представляя собою таким образом целую трансцендентную функцию.

Фиг. 65.

4. Совершенно так же, как и при вещественном переменном, можно вывести из определения при помощи интеграла теорему сложения для логарифма, из которой для обратной функции вытекает уравнение:

$$f(w_1) \cdot f(w_2) = f(w_1 + w_2). \tag{3}$$

Точно так же из соотношения (2) получаем:

$$f(w + 2ki\pi) = f(w) \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots); \tag{4}$$

другими словами, $f(w)$ представляет простую периодическую функцию с периодом $2\pi i$.

5. Пусть $f(1) = e$. Тогда из соотношения (3) следует, что для каждого рационального значения $w = \frac{m}{n}$ число $f(w)$ равно одному[1]) из n значений $\sqrt[n]{e^m}$, определенных обычным образом:

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = \sqrt[n]{e^m} = e^{\frac{m}{n}}.$$

Принято — и мы тоже примкнем к этому обычаю — обозначать через $e^w = e^{\frac{m}{n}}$ всегда именно это значение $f(w)$, так что e^w обозначает вполне определенную однозначную функцию, а именно ту, которая определена в пункте 3.

6. Какую же функцию надо понимать в наиболее общем смысле под степенью b^w при произвольном основании b? Определения должны быть даны таким образом, чтобы сохранились формальные правила возведения в степень. Если, таким образом, чтобы свести b^w к только что определенной функции e^w, мы положим b равным $e^{\ln b}$, где $\ln b$ имеет бесконечно много значений:

$$\ln b = [\ln b] + 2k\pi i \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

то получается необходимым образом:

$$b^w = (e^{\ln b})^w = e^{w \cdot \ln b} = e^{w[\ln b]} \, e^{2ki\pi w} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

а это представляет при различных значениях k бесконечно много функций, среди которых совершенно нет равных. Таким образом мы приходим к тому замечательному результату, что значения показательного выражения общего вида b^w, получаемые посредством процессов возведения в степень и извлечения корня, принадлежат отнюдь не одной и той же функции, а бесконечно многим различным функциям от w, каждая из которых однозначна.

Значения этих функций стоят, конечно, в различных соотношениях между собою. В частности все они равны между собой, если w есть целое число; если же w есть рациональная дробь вида $\frac{m}{n}$, где m, n — взаимно простые числа, то среди них существует только конечное число, а именно n различных значений; это суть значе-

[1]) И именно вещественному и положительному. *Ред.*

ния $e^{\frac{m}{n}[\ln b]} e^{2k\pi i \frac{m}{n}}$ для $k = 0, 1, \ldots, n-1$; таким образом это, как оно и должно было быть, суть n значений корня $\sqrt[n]{b^m}$.

7. Теперь лишь мы можем вполне понять, до какой степени нецелесообразна обычная систематика, которая хочет, исходя из возведения в степень и извлечения корней, подойти к однозначной показательной функции; этим она попадает в лабиринт, из которого она не может найти выхода с помощью одних своих так называемых „элементарных" средств, обязывая себя к тому же не выходить за пределы области вещественных величин. Вам станет это вполне ясно, если вы теперь на основании приобретенного общего взгляда сообразите, как обстоит дело при отрицательном b. Я должен еще указать здесь на то, что теперь мы действительно можем понять целесообразность того определения главных значений, которое раньше казалось нам произвольным ($b > 0$ и $b^{\frac{m}{n}} > 0$; см. стр. 216): оно доставляет исключительно значения одной из наших бесчисленных функций, а именно значения функции

$$[b^w] = e^{w[\ln b]}.$$

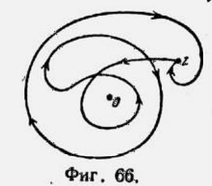
В противоположность этому отрицательные вещественные значения величины $b^{\frac{m}{n}}$, при четном n, которые тоже образуют всюду плотные множества, принадлежат совершенно разным из наших бесчисленных функций, и поэтому они не могут, вместе взятые, составить одну непрерывную аналитическую кривую.

Теперь я хочу добавить еще несколько более глубоких замечаний относительно природы логарифма с точки зрения теории функций. Так как функция $w = \ln z$ при каждом обходе около точки $z = 0$ испытывает приращение в $2\pi i$, то соответствующая ей риманова поверхность с бесконечным числом листов должна иметь в этом месте точку разветвления бесконечно высокого порядка, а именно такого рода, что при каждом обходе около нее переходят от одного листа к следующему; заменяя плоскость сферой, нетрудно убедиться в том, что точка $z = \infty$ представляет вторую точку разветвления поверхности такого же самого рода. других точек разветвления

не имеется. Теперь мы можем наглядно представить себе то, что называют униформизирующей силой логарифма, о которой мы уже упомянули по поводу решения известных алгебраических уравнений (стр. 199). Если имеется, рациональная степень $z^{\frac{m}{n}}$, то в силу тождества

$$z^{\frac{m}{n}} = e^{\frac{m}{n} \ln z}$$

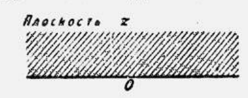
она является однозначной функцией от $w = \ln z$, или, как говорят, она униформизируется логарифмом. Чтобы понять это, представим себе на плоскости, кроме римановой поверхности логарифма, еще и риманову поверхность функции $z^{\frac{m}{n}}$: это n-листная поверхность, точки разветвления которой лежат тоже в точках $z=0$ и $z=\infty$, в каждой из которых сходятся циклически все n листов. Если представить себе в плоскости z такой замкнутый путь, что на нем логарифм возвращается к своему первоначальному значению,—так что этот путь является замкнутым и на бесконечно многолистной поверхности логарифма,— то легко видеть, что он должен оставаться замкнутым и в том случае, если перенести его на n-листную поверхность $z^{\frac{m}{n}}$ (фиг. 66). Из этих геометрических соображений мы заключаем, что $z^{\frac{m}{n}}$ возвращается к своему начальному значению всякий раз, как возвращается к своему значению $\ln z$, и что поэтому функция $z^{\frac{m}{n}}$ действительно униформизируется логарифмом. Я тем охотнее делаю эти краткие указания, что здесь мы имеем простейший случай проблемы униформизирования, играющей столь большую роль в современной теории функций.



Фиг. 66.

Теперь постараемся еще лучше представить себе природу функциональной зависимости $w = \ln z$, а именно при помощи рассмотрения конформного отображения плоскости z (или соответственно римановой поверхности) на плоскость w. Чтобы не удаляться слишком в сторону, мы откажемся от рассмотрения соответствующих сфер,

что само по себе являлось бы, конечно, предпочтительным. Разделим, как мы это делали выше, плоскость z осью вещественных чисел на заштрихованную (верхнюю) и незаштрихованную полуплоскости; каждая из них должна отображаться на плоскости w бесконечное множество раз, так как $\ln z$ имеет бесконечное число значений и все эти изображения должны располагаться рядом друг подле друга [1]), ибо обратная функция $z = e^w$ однозначна. В частности здесь получается подразделение плоскости w на параллельные полосы шириною в π, образуемые параллелями к оси вещественных чисел; эти полосы следует попеременно заштриховать и оставить **чистыми** (первая полоса кверху от вещественной оси [w] заштрихована); соответственно этому они представляют собой попеременно конформные отображения верхней и нижней полуплоскостей, в то время как пограничные параллели соответствуют частям вещественной оси z (фиг. 67). Что же касается подробностей этого соответствия, то замечу здесь только, что z всегда направляется к нулю, когда w удаляется в бесконечность влево, оставаясь внутри одной и той же полосы; между тем z удаляется в бесконечность, если w уходит в бесконечность вправо; $w = \infty$ представляет существенно особенную точку обратной функции e^w.





Фиг. 67.

Я бы хотел указать еще на связь этого с **теоремой Пикара** (Picard)—одной из самых интересных в новейшей теории функций. Пусть $z(w)$ означает целую трансцендентную функцию, т. е. такую функцию, которая имеет только одну существенно особенную точку, а именно в точке $w = \infty$ (например e^w). Вопрос заключается в том,

[1]) В том смысле, что образы заштрихованной полуплоскости не должны нигде покрывать других образов, ибо иначе одной и той же точке w соответствовали бы **две** точки z — одна выше, другая ниже вещественной оси. *Ред.*

имеются ли и в каком именно числе такие значения z, которых $z(w)$ не принимает ни при одном конечном (т. е. расположенном на конечном расстоянии) значении w, но к которым $z(w)$ только приближается, если w надлежащим образом удаляется в бесконечность. Теорема Пикара и состоит в том, **что для каждой функции может быть самое большее два таких различных значения, которых она не может принимать в окрестности существенно особенного места, и что, следовательно, целая трансцендентная функция, кроме значения $z = \infty$, которого она никогда не может достигнуть, не принимает еще самое большее одного значения.** e^w представляет пример функции, которая действительно, кроме ∞, не принимает еще одного значения, а именно $z = 0$, ибо хотя e^w в каждой из параллельных полос нашего деления и приближается при указанных предельных переходах к обоим этим значениям, но ни в одном конечном месте не становится равной им. Пример функции, которая не принимает только одного значения ($z = \infty$), представляет $\sin w$.

В заключение я хочу с помощью этих геометрических средств выяснить еще один пункт, которого я уже несколько раз касался, это — предельный переход от степени к показательной функции, которая примыкает к формуле:

$$e^w = \lim_{n=\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nw},$$

или, полагая $n \cdot w = \nu$:

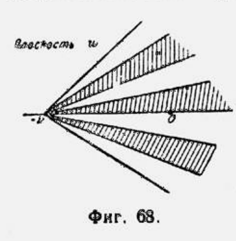
$$e^w = \lim_{\nu=\infty}\left(1 + \frac{w}{\nu}\right)^{\nu}.$$

Рассмотрим с этой целью функцию в том виде, как она является до предельного перехода:

$$f_\nu(w) = \left(1 + \frac{w}{\nu}\right)^{\nu};$$

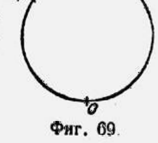
функционально-теоретические свойства ее как степени нам хорошо известны. Для нее „замечательными точками" служат точки $w = -\nu$ и $w = \infty$, в которых основание

становится равным нулю и, соответственно, ∞. Эта функция отображает конформным образом полуплоскости f_ν на секторах плоскости w, имеющих каждый общую вершину в точке $w = -\nu$ и угловое отверстие в $\frac{\pi}{\nu}$ (фиг. 68); если ν не равно целому числу, то последовательность этих секторов может покрывать поверхность w конечное или бесконечное число раз, соответственно той многозначности, которою обладает в этом случае f_ν. Если ν становится бесконечно большим, то вершина секторов отодвигается влево до бесконечности, и вполне понятно, что секторы, расположенные справа от $-\nu$, переходят при этом в параллельные полосы плоскости w, соответствующие предельной функции e^w; это дает геометрическое разъяснение указанного определения e^w посредством предела; с помощью несложного вычисления можно убедиться в том, что ширина секторов у точки $w=0$ переходит при этом в ширину π полос параллельного подразделения.



Фиг. 68.

Но тут сейчас же является сомнение следующего рода: если давать ν возрастать до бесконечности, то оно получает при этом не только целые, но также рациональные и иррациональные значения, для которых функция f_ν становится многозначной и которым соответствуют многолистные поверхности; как же могут последние перейти в простую плоскость, принадлежащую однозначной функции e^w? Если, например, ν переходит в бесконечность, принимая одни только дробные значения со знаменателем n, то каждая функция $f_\nu(w)$ имеет риманову поверхность с n листами. Чтобы проследить за этим процессом, обратимся на одну минуту к сфере w; для каждой функции $f_\nu(w)$ она покрыта n листами, которые встречаются в точках разветвления $-\nu$ и ∞; предположим, что сечение разветвления проходит вдоль меньшей дуги меридиана, соединяющего эти точки (фиг. 69). Когда ν уходит в бесконечность, то точки разветвления сближаются и сечение разветвления исчезает; этим уничтожается тот мост, вдоль которого n листов переходили друг в друга, и получаются n отдельных листов и соответственно им n различных однозначных функций; наша функция e^w представляет только одну из них. Если же предоставить ν пробегать все вещественные значения, то получаются вообще поверхности с бесконечным числом листов, связь которых прекращается в предельном положении; на одном из листов каждой такой поверхности значения стремятся в пределе к совпадению со значениями однозначной функции e^w, которая расположена на простой сфере, между тем как последовательности значений на других листах, вообще говоря, не стремятся ни к каким предельным значениям. Этим вполне выясняется довольно-таки сложный и замечательный предельный переход от многозначной степени к однозначной показательной функции.



Фиг. 69.

Общую мораль всех этих рассуждений можно, пожалуй, видеть в том, что полное понимание сущности подобных проблем возможно только при переходе в комплексную область. Не является ли это достаточным основанием для того, чтобы и в школе изучать теорию комплексных функций? Макс Симон (Max Simon), например, действительно выставляет подобные требования. Но я не думаю, чтобы возможно было дойти до этого со средними учениками даже в последнем классе, и уже по одному этому я полагаю, что следует отказаться в преподавании от появляющейся здесь методики алгебраического анализа в пользу развитого выше простого и естественного пути. Конечно, мне представляется тем более желательным, чтобы учитель вполне владел всеми играющими здесь роль сведениями из теории функций, ибо он должен стоять достаточно высоко над тем материалом, который ему приходится излагать, и должен в точности знать все те подводные скалы и мели, среди которых он проводит своих учеников.

После этих подробных рассуждений мы сможем быть гораздо кратче в изложении учения о гониометрических функциях.

II. О ГОНИОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ.

Заметим прежде всего, что мы предпочитаем это название наименованию „тригонометрические функции" по той причине, что учение о треугольниках представляет только частное применение этих функций, играющих в высшей степени важную роль во всех отраслях математики. Обратные им функции, вполне соответствующие логарифму (между тем как сами гониометрические функции представляют аналогию с показательной функцией), мы будем называть циклометрическими функциями.

1. Теория гониометрических функций.

Рассмотрение этой теории мы поставим в связь с вопросом о том, какой способ изложения ее в школе представляется наиболее естественным. Я полагаю, что и в этом случае будет лучше всего применить наш общий принцип, согласно которому надо исходить от квадратуры плоских кривых. Обычный способ изложения, который начинается с измерения дуг, кажется мне не в такой степени непосредственно наглядным; и прежде всего он не дает возможности одинаково просто и с одной и той же точки зрения охватить как высшие, так и низшие области. Позвольте мне снова воспользоваться аналитической геометрией:

1. За исходный пункт я беру круг с радиусом 1:

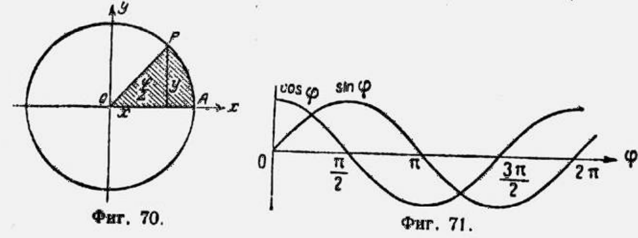
$$x^2 + y^2 = 1$$

(фиг. 70) и рассматриваю сектор, образуемый радиусами-векторами точек A $(x = 1,\ y = 0)$ и P (x, y). Чтобы оказаться в согласии с обычными обозначениями, я буду обозначать площадь этого сектора через $\frac{\varphi}{2}$ (ибо тогда дуга $AP = \varphi$).

2. Под гониометрическими функциями „косинус" и „синус" аргумента φ мы будем понимать длины координат x и y конечной точки P нашего сектора $\frac{\varphi}{2}$:

$$x = \cos\varphi,\ y = \sin\varphi.$$

Происхождение этого обозначения остается при этом, конечно, неясным; но ведь оно и вообще хорошо неизвестно; по всей вероятности, слово „sinus" возникло вследствие какого-нибудь недоразумения при переводе арабского слова на латинский язык[1]). Так как мы исходили не от измерения дуги, то не представляется удобным обозначить обратные функции,— т. е. двойной сектор как функцию координат,— обычным названием „arcus";



Фиг. 70. Фиг. 71.

весьма целесообразным является принятый в Англии способ обозначения:

$$\varphi = \cos^{-1} x,\ \varphi = \sin^{-1} y.$$

3. Прочие гониометрические функции:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi},\ \operatorname{ctg}\varphi = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi},$$

а в старой тригонометрии еще $\sec\varphi$ и $\operatorname{csec}\varphi$, определяем как простые сочетания обеих основных функций. Их вводят исключительно ради сокращения формул, которые приходится применять на практике; теоретического значения они для нас не имеют.

4. Если мы станем следить за изменением координат точки P при возрастании φ, то легко сможем составить себе качественное представление о виде кривых синуса и косинуса в прямоугольной системе координат[2]). По-

[1]) Ср. Tropfke, Bd. II, pag. 212.

[2]) Другими словами, строим кривые $x = \cos\varphi$, $y = \sin\varphi$, считая φ абсциссой, а x или y ординатой прямоугольной системы координат. Когда φ изменяется от 0 до 2π, радиус OP обегает весь круг, и функции x и y возвращаются к первоначальным значениям, повторяя при дальнейшем увеличении φ прежний цикл изменений. *Ред.*

лучаем известные волнообразные линии, имеющие период 2π (фиг. 71); при этом число π определяем, как площадь полного круга радиуса 1 (а не как длину полуокружности).

Сравним теперь подробно с этими определениями изложенный выше способ определения логарифма и показательной функции.

1. Там мы исходили от равносторонней гиперболы, отнесенной к ее асимптотам:

$$\xi \cdot \eta = 1;$$

полуось этой гиперболы $OA = \sqrt{2}$, тогда как здесь радиус круга равнялся 1 (фиг. 72). Мы рассматривали далее площадь полосы между неподвижной ординатой AA' $(\xi = 1)$ и подвижной PP'; обозначая ее через Φ, мы полагали $\Phi = \ln \xi$, так что координаты P оказывались равными

$$\xi = e^{\Phi}, \ \eta = e^{-\Phi}.$$

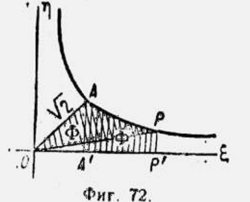
Вы замечаете известную аналогию с предыдущим, которая, впрочем, уже здесь нарушается в двух отношениях: во-первых, Φ теперь не выражает сектора, как выше в случае круга; во-вторых, здесь обе координаты выражаются рационально через одну функцию e^{Φ}, между тем как в случае круга мы должны были ввести две функции: $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$. Но мы сейчас увидим, что оба отклонения можно легко устранить.

2. Прежде всего заметим, что площадь треугольника $OP'P$ не зависит от положения точки P на кривой, а именно всегда равна $\frac{1}{2}\, OP' \cdot P'P = \frac{1}{2}\, \xi \cdot \eta = \frac{1}{2}$. В частности, она равна площади треугольника $OA'A$, так что, присоединяя этот треугольник к Φ и отнимая равный треугольник $OP'P$, находим, что Φ можно определить как площадь гиперболического сектора OAP, заключенного между радиусами-векторами вершины A и подвижной точки гиперболы, — вполне аналогично случаю круга (фиг. 73). Остающееся различие в знаках — для наблюдателя, находящегося в O, дуга AP прежде была направлена влево, а теперь

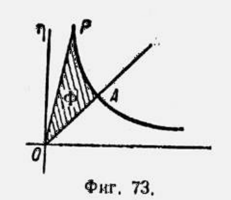
вправо — мы устраним тем, что заменим гиперболу ее зеркальным отображением относительно радиуса-вектора OA, — другими словами, переставим между собою ξ и η; тогда координаты точки P будут:

$$\xi = e^{-\Phi}, \ \eta = e^{\Phi} \text{ }^{1)}.$$

3. Наконец, примем за оси координат вместо асимптот главные оси гиперболы, повернув для этого весь чертеж на 45° (фиг. 74). Если обозначить



Фиг. 72.



Фиг. 73.

новые координаты через X, Y, то уравнения преобразования будут иметь такой вид:

$$X = \frac{\xi + \eta}{\sqrt{2}}, \quad Y = \frac{-\xi + \eta}{\sqrt{2}};$$

поэтому уравнение гиперболы переходит в:

$$X^2 - Y^2 = 2,$$

и сектор Φ принимает такое же положение, какое он раньше занимал в круге. Новые координаты точки P представляют следующие функции аргумента Φ:

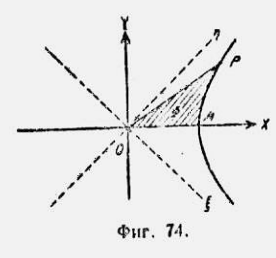
$$X = \frac{e^{\Phi} + e^{-\Phi}}{\sqrt{2}}; \quad Y = \frac{e^{\Phi} - e^{-\Phi}}{\sqrt{2}}.$$

4. Остается только уменьшить весь чертеж в отношении $1 : \sqrt{2}$, чтобы полуось гиперболы стала равна 1 вместо $\sqrt{2}$, подобно тому как раньше радиус круга равнялся единице. Теперь, вполне соответственно тому, что

[1]) Иначе говоря, Φ определяется, как $\ln \eta$, а не как $\ln \xi$, так что $\eta = e^{\varphi}$, $\xi = e^{-\varphi}$ и $\varphi > 0$ влево от луча OA (ибо тогда $\eta > 1$, $\ln \eta > 0$). *Ред.*

мы имели выше, площадь сектора, о котором идет речь, равна $\frac{1}{2}\Phi$; обозначая новые координаты снова через x, y, находим, что они равны следующим функциям аргумента Φ:

$$x = \frac{e^{\Phi} + e^{-\Phi}}{2}, \quad y = \frac{e^{\Phi} - e^{-\Phi}}{2},$$



Фиг. 74.

которые удовлетворяют такому соотношению (уравнению гиперболы):

$$x^2 - y^2 = 1.$$

Этим функциям дано название **гиперболического косинуса и синуса**; их обозначают через

$$x = \operatorname{ch}\Phi = \frac{e^{\Phi} + e^{-\Phi}}{2};$$

$$y = \operatorname{sh}\Phi = \frac{e^{\Phi} - e^{-\Phi}}{2}.$$

Результат, к которому мы пришли, сводится к следующему. **Если поступать с кругом радиуса 1 и с равносторонней гиперболой, полуось которой равна 1, совершенно одинаково, то в первом случае мы придем к обыкновенным гониометрическим функциям, а во втором — к гиперболическим функциям, которые вполне соответствуют одни другим.**

Как вам известно, применение этих функций ch и sh часто бывает полезно. Но тем не менее в данном случае в применении к исследованию гиперболы мы, в сущности, сделали шаг назад: между тем как раньше мы могли рационально представить координаты ξ, η с помощью одной только функции e^{Φ}, теперь нам необходимы для этого две функции, связанные между собой алгебраическим соотношением (уравнением гиперболы). Поэтому представляется естественным поступить обратно; именно, развить учение о гониометрических функциях совершенно аналогично тому, как мы раньше определили логарифм,

исходя от гиперболы. Сделать это очень легко, если только не бояться перехода через комплексные величины; приходится ввести только одну основную функцию, посредством которой $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ выражаются рациональным образом, подобно тому как $\operatorname{ch}\Phi$ и $\operatorname{sh}\Phi$ выражаются через e^{Φ}; она призвана поэтому играть в теории гониометрических функций центральную роль.

1. Для этого мы прежде всего вводим в уравнение круга $x^2 + y^2 = 1$ (где $x = \cos\varphi$, $y = \sin\varphi$) новые координаты

$$x - iy = \xi, \quad x + iy = \eta,$$

после чего уравнение принимает вид:

$$\xi \cdot \eta = 1.$$

2. Искомой центральной функцией является — подобно тому как было в случае гиперболы (см. пункт 2 на стр. 246) — вторая координата; обозначая ее через $f(\varphi)$, находим на основании уравнений преобразования:

$$\eta = f(\varphi) = \cos\varphi + i\sin\varphi, \quad \xi = \frac{1}{f(\varphi)} = \cos\varphi - i\sin\varphi.$$

3. На основании последних равенств находим, что

$$\cos\varphi = \frac{\xi + \eta}{2} = \frac{f(\varphi) + f(\varphi)^{-1}}{2},$$

$$\sin\varphi = \frac{-\xi + \eta}{2i} = \frac{f(\varphi) - f(\varphi)^{-1}}{2i},$$

чем достигается полная аналогия с прежними соотношениями между $\operatorname{ch}\Phi$, $\operatorname{sh}\Phi$, e^{Φ}. Если, таким образом, заранее вскрыть аналогию между круговыми и гиперболическими функциями, то великое открытие Эйлера, выражаемое формулой $f(\varphi) = e^{i\varphi}$, теряет характер поразительной неожиданности.

Не является ли возможным подобное сведение функций $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ к одной основной функции и в том случае, если оставаться в вещественной области? К этому, действительно, можно притти, если взглянуть на наши фигуры с точки зрения проективной геометрии. А именно, можно в случае гиперболы ту координату η, которая доставила нам основную функцию, определить как параметр в пучке параллелей $\eta = \text{const}$, который, будучи рассма-

триваем с проективной точки зрения в его отношении к гиперболе, представляет не что иное, как пучок лучей с вершиной в одной из точек гиперболы (здесь — как раз в одной из бесконечно удаленных точек). Рассматривая в случае круга или гиперболы, вообще, параметр какого-нибудь такого пучка как функцию площади, мы придем к другой основной функции,— тоже оставаясь в вещественной области.

Рассмотрим для этого в случае круга пучок, проходящий через точку S (— 1,0):

Фиг. 75

$$y = \lambda(x + 1),$$

где λ означает параметр (фиг. 75); выше (стр. 68 и 69) мы уже вычислили координаты точки пересечения P луча, принадлежащего параметру λ, с окружностью, а именно мы нашли, что

$$x = \cos\varphi = \frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}, \quad y = \sin\varphi = \frac{2\lambda}{1+\lambda^2},$$

так что

$$\lambda = \lambda(\varphi) = \frac{y}{x+1}$$

действительно представляет собой нужную нам вещественную основную функцию. А так как, с другой стороны, угол $PSO = \frac{1}{2} POA$ и $POA = \varphi$, то отсюда непосредственно вытекает, что $\lambda = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$; этим однозначным выражением функций $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ через $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$ очень часто пользуются при тригонометрических вычислениях. Соотношение функции λ с прежней основной функцией $f(\varphi)$ получается из последней формулы в таком виде:

$$\lambda = \frac{y}{x+1} = \frac{1}{i}\cdot\frac{f - f^{-1}}{f + f^{-1} + 2} = \frac{1}{i}\frac{f^2-1}{f^2+1+2f} = \frac{1}{i}\frac{f(\varphi)-1}{f(\varphi)+1}$$

или наоборот:

$$f(\varphi) = x + iy = \frac{1-\lambda^2+2i\lambda}{1+\lambda^2} = \frac{1+i\lambda}{1-i\lambda}.$$

Таким образом введение величины λ сводится в конечном счете попросту к установлению некоторой дробно-линейной функции от $f(\varphi)$, которая имеет вещественное значение вдоль вещественной окружности круга; хотя благодаря этому формулы становятся вещественными, но зато они не столь простые, как при непосредственном применении функции $f(\varphi)$.

Стоит ли покупать преимущество вещественности ценой такого недостатка,— это зависит, конечно, от того, насколько то или иное лицо умеет обращаться с комплексными величинами. По этому поводу я замечу только, что физики давно уже перешли к употреблению мнимых величин, в особенности же в оптике, когда приходится иметь дело с уравнениями колебательных движений. С другой стороны, техники — и прежде всего электротехники с их вектор-диаграммами — тоже начинают в последнее время с успехом пользоваться комплексными величинами. Таким образом можно утверждать, что применение комплексных величин начинает, наконец, завоевывать права гражданства в более широких кругах, хотя, конечно, в настоящее время значительное большинство все еще крепко держится вещественной области.

Имея в виду обозреть в общих чертах дальнейшее развитие теории гониометрических функций, мы дожны прежде всего упомянуть о теореме сложения.

1. Теорема сложения выражается формулой:

$$\sin(\varphi + \psi) = \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi$$

и аналогичной формулой для $\cos(\varphi + \psi)$. Причина того обстоятельства, что эти формулы выглядят сравнительно сложнее, чем в случае показательной функции, заключается, конечно, в том, что здесь мы имеем дело не с основной элементарной функцией; для этой последней функции: $f(\varphi) = \cos\varphi + i\sin\varphi$ получается совершенно такая же крайне простая формула, как и для e^{φ}:

$$f(\varphi + \psi) = f(\varphi)\cdot f(\psi).$$

2. От фомулы сложения мы приходим к выражениям функций для кратных углов и для частей угла, из числа которых я отмечу только две следующие формулы, игравшие большую роль при вычислении первых тригонометрических таблиц:

$$\sin\frac{\varphi}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{2}},\quad \cos\frac{\varphi}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{2}}.$$

Изящное выражение всех соотношений, имеющих здесь место, дает так называемая „формула Муавра“:

$$f(n\cdot\varphi)=[f(\varphi)]^n,\ \text{где}\ f(\varphi)=\cos\varphi+i\sin\varphi.$$

Муавр (Moivre) был француз, но жил в Лондоне в кругу Ньютона; свою формулу он опубликовал в 1730 г. в книге „Miscellanea analytica“.

3. Исходя из нашего первоначального определения $y=\sin\varphi$, можно, разумеется, легко получить выражение обратной функции: $\varphi=\sin^{-1}y$ в виде интеграла. Сектор $\frac{\varphi}{2}(AOP)$ круга радиуса 1, вместе с горизонтально заштрихованным треугольником $OP'P$, ограничен параллелями к оси абсцисс $y=0$ и y и кривой $x=\sqrt{1-y^2}$ и имеет поэтому площадь, равную $\int\limits_0^y\sqrt{1-y^2}\,dy$ (фиг. 76); а так как упомянутый треугольник имеет площадь $\frac{1}{2}OP'\cdot PP'=$ $=\frac{1}{2}y\sqrt{1-y^2}$, то

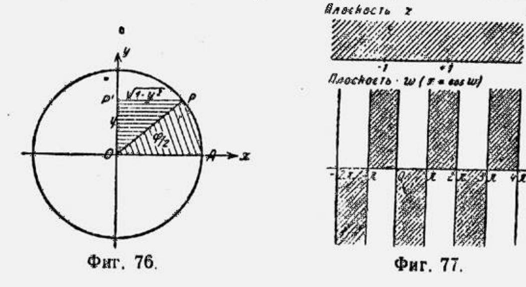
$$\int\limits_0^y\sqrt{1-y^2}\,dy=\frac{1}{2}y\sqrt{1-y^2}+\frac{1}{2}\varphi.$$

Отсюда находим посредством простого преобразования:

$$\varphi=\sin^{-1}y=\int\limits_0^y\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Поступая теперь совершенно так же, как мы поступали в случае логарифма, а именно, разлагая подинтегральное выражение в ряд по теореме бинома и применяя затем, по идее Меркатора, почленное интегрирование, можно найти разложение $\sin^{-1}y$ в степенной ряд, а из него вывести, пользуясь методом обращения рядов, ряд для самого синуса; так именно,— я уже говорил об этом выше,— поступил сам Ньютон.

4. Я больше склонен воспользоваться здесь более кратким путем, который стал возможен благодаря великому открытию, сделанному Тейлором. Для этого из упомянутого интегрального выражения выводим сперва величину производной для самого синуса:



Фиг. 76. Фиг. 77.

$$\frac{d\sin\varphi}{d\varphi}=\frac{dy}{d\varphi}=\sqrt{1-y^2}=\cos\varphi;$$

совершенно аналогично находим:

$$\frac{d\cos\varphi}{d\varphi}=-\sin\varphi.$$

Отсюда на основании теоремы Тейлора получаем разложения:

$$\sin\varphi=\frac{\varphi}{1!}-\frac{\varphi^3}{3!}+\frac{\varphi^5}{5!}-\ldots;$$

$$\cos\varphi=1-\frac{\varphi^2}{2!}+\frac{\varphi^4}{4!}-\ldots$$

Нетрудно видеть, что эти ряды сходятся для всякого конечного, даже комплексного, значения x, так что $\sin x$ и $\cos x$ определяются ими как однозначные целые трансцендентные функции во всей комплексной плоскости.

5. Сравнивая эти ряды с рядом для e^{φ}, находим, что основная функция

$$f(\varphi) = \cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}.$$

Такой вывод без оговорки становится возможным только после того, как мы убедились, что $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ так же, как и e^{φ}, представляют собой однозначные целые функции.

6. Остается описать ход изменения комплексных функций $\sin w$, $\cos w$. С этой целью я прежде всего замечу, что каждая из обратных функций $w=\sin^{-1}z$ и $w=\cos^{-1}z$ дает поверхность Римана с бесконечным числом листов и с местами разветвления $-1, +1, \infty$, а именно над точками $z=\pm 1$ лежит по бесконечному числу точек разветвления первого порядка, а над точкой $z=\infty$ находятся две точки разветвления бесконечно высокого порядка. Чтобы лучше выяснить расположение листов, рассмотрим снова подразделение плоскости w на области, соответствующие верхней (заштрихованной) и нижней (незаштрихованной) полуплоскости z (фиг. 77). Для $z=\cos w$ это подразделение получается с помощью вещественной оси и параллелей к мнимой оси, проходящей через точки $w=0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$; при этом, как видно из чертежа, получаются треугольные области, которые все простираются до бесконечности; их приходится попеременно заштриховывать и оставлять чистыми. В точках $w=0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$, соответствующих $y=+1$, и в точках $w=\pm\pi, \pm 3\pi, \ldots$, соответствующих $y=-1$, встречается по четыре треугольника, соответственно четырем полулистам поверхности Римана, которые сходятся в каждой из точек разветвления, лежащих над местами $z=\pm 1$. К значению $z=\infty$ функция $\cos w$ приближается сколь угодно близко всякий раз, как мы удаляемся внутри одного какого-нибудь треугольника вверх или вниз до бесконечности. Действительно, две отдельные системы, состоящие каждая из бесконечного числа треугольников, простираются в бесконечность в соответствии с тем обстоятельством, что на римановой поверхности в точке ∞ сходятся две отдельные системы из бесконечного числа листов каждая. В случае $z=\sin w$ дело обстоит совершенно аналогично, с той только разницей, что чертеж в плоскости w следует представить себе передвинутым на $\frac{\pi}{2}$ вправо. На этих чертежах находят подтверждение сделанные нами выше (по поводу теоремы Пикара) указания относительно природы существенно особенной точки $w=\infty$ (стр. 240).

2. Тригонометрические таблицы.

На этом я закончу краткий обзор теории гониометрических функций и перейду к рассмотрению того, что наиболее важно на практике, а именно тригонометрических таблиц. Одновременно с этим я буду говорить о таблицах логарифмов, рассмотрение которых я до сих пор откладывал ввиду того, что составление этих последних с самого начала и до наших дней идет рука об руку с составлением тригонометрических таблиц. Вопрос о том, каким образом таблицы логарифмов получили свой теперешний вид, представляется, конечно, весьма важным и интересным и для школьного преподавателя математики. Разумеется, я не могу здесь подробно изложить всю крайне продолжительную историю развития таблиц; я хочу только отметить некоторые наиболее замечательные моменты, чтобы дать вам приблизительное понятие об этом развитии. Относительно других, тоже часто весьма важных произведений, которые дополняют общую картину, вы сможете ориентироваться с помощью сочинения Тропфке [1]) или весьма подробных указаний в реферате Мемке (Mehmke) [2]) о числовых вычислениях (Encykl.. I., F.), а также во французской обработке этой статьи, принадлежащей д'Оканю (D'Okagne) [2]).

А. Чисто тригонометрические таблицы.

Под этим названием мы разумеем таблицы, которые были построены до изобретения логарифмов. Такие таблицы существовали уже в древности, а именно — первой дошедшей до нас является таблица Птолемея.

1. Это так называемая таблица хорд Птолемея, которую последний составил для астрономических целей около

[1]) См. примечания на стр. 24 и 40. *Ред.*
[2]) Encyclopédie, édition française, I, 23.

150-го года н. э. Она помещена в его сочинении „Megale Syntaxis“, в котором Птолемей развивает названную его именем систему мира; эту книгу вы видите здесь в новом издании [1]). Это сочинение дошло до нас окольным путем через руки арабов под часто употребляемым названием „Almagest“, которое, быть может, получилось из соединения арабского члена „al“ с извращенным греческим названием. Эта таблица Птолемея дает для углов с интервалами в 30 минут не самый синус угла α, а соответствующую этому углу хорду $\left(\text{т. е. } 2\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\right)$. Значения хорд даны здесь в трехзначных шестидесятиричных дробях, другими словами, в виде $\frac{a}{60}+\frac{b}{3600}+\frac{c}{216\,000}$, где a, b, c представляют целые числа от нуля до 59. Для нас самым трудным является то обстоятельство, что эти числа a, b, c написаны, разумеется, греческими числовыми знаками, т. е. посредством сочетаний греческих букв. Далее мы находим здесь еще значения разностей, которые позволяют производить интерполяцию от минуты до минуты. Впрочем, Тропфке дает для примера (Bd. II, S. 296) перевод отрывка из этой таблицы на современный способ обозначений, в котором вы сможете ближе ориентироваться. Что же касается вычисления этой таблицы, то Птолемей, во всяком случае, пользовался приведенной выше формулой для $\sin\frac{\alpha}{2}$ (следовательно, он применял извлечение корня) и интерполяцией.

2. Перенесемся теперь на тысячу лет далее — к тому времени, когда тригонометрические таблицы были вычислены впервые на Западе. Здесь прежде всего приходится назвать Региомонтана (Regiomontanus, 1436—1476), который, собственно, назывался Иоганном Мюллером, а свое латинское имя получил по названию города Кёнигсберга (у Гильдбургаузена), в котором он родился. Он вычислил различные тригонометрические таблицы, в которых ясно виден переход от остатков шестидесятиричной системы к чистой десятиричной системе. В то время тригонометрических линий не изображали, как теперь,

[1]) Издано Гейбергом (Heiberg), Leipzig 1898/1903.

в виде дробей, принимая радиус за 1, но вычисляли их для окружностей очень большого радиуса, так что можно было — с неменьшей точностью — ограничиться выражением их в целых числах. Эти большие числа уже тогда писали по десятиричной системе, но в выборе радиуса еще долгое время слышались отзвуки шестидесятиричной системы. Так, в одной таблице Региомонтана радиус считается равным 6 000 000; но в другой таблице впервые радиус равен чистому десятичному числу 10 000 000 благодаря чему все вычисление оказалось построенным по чистой десятиричной системе. Достаточно вставить запятую, чтобы число этой таблицы превратилось в нашу десятичную дробь. Эти таблицы Региомонтана были напечатаны лишь много спустя после его смерти, а именно в сочинении его учителя Пейрбаха „Трактат о предложениях Птолемея относительно синусов и хорд“ [1]). Обратите внимание на то, что и это сочинение, как и многие другие капитальные математические издания — из них нам уже известны произведения Кардана и Штифеля, а дальше мы познакомимся и с другими,—были отпечатаны в 40-х годах XVI в. в Нюрнберге. Сам Региомонтан провел большую часть жизни в Нюрнберге.

3. Теперь я предложу вашему вниманию книгу, имевшую огромное значение вообще, а именно сочинение Николая Коперника „De revolutionibus orbium coelestium“ [2]), в котором развита „коперникова система мира“. Коперник (Koppernikus) жил от 1473 г. до 1543 г. в Торне; но упомянутое сочинение появляется снова в Нюрнберге, всего лишь через два года после появления таблиц Региомонтана, с которыми Коперник тогда еще не был знаком; поэтому для осуществления своей теории он должен был сам вычислить небольшую таблицу синусов.

4. Но эти таблицы ни в коем случае не могли удовлетворить потребности астрономов, и вот мы видим, что один ученик и друг Коперника вскоре приступает к осуществлению гораздо шире задуманного дела. Это — Ретикус (Rhaeticus), что тоже представляет искусно латини-

[1]) G. Peurbach, Tractatus super propositiones Ptolemaei de sinubus et chordis, Norimbergae, ap Jo. Petreium, 1541.
[2]) Norimbergae, ap. Jo. Petreium, 1543.

зированное указание на этот раз его родной страны (Vorarlberg). Он жил с 1514 г. по 1596 г. и был профессором в Виттенберге. Во всем этом обзоре вы всегда должны принимать во внимание общеисторическую обстановку; так, этот период относится к эпохе реформации, во время которой, как известно, Виттенберг, а также свободный имперский город Нюрнберг стали главными центрами умственной жизни. Но постепенно в течение реформационных войн центр тяжести политической и духовной жизни передвигается все более от городов к княжеским дворам и вот в то время, как до сих пор все печаталось в Нюрнберге, обширные таблицы Ретикуса появляются на свет в Гейдельберге при денежной поддержке пфальцского курфюрста; соответственно этому они получают название „Opus palatinum" (Heidelbergae 1596). Они появились лишь вскоре после смерти Ретикуса. Эти таблицы гораздо полнее предыдущих; в них содержатся значения тригонометрических линий для каждых 10″ в десятизначных дробях; правда, в них встречается еще довольно много ошибок.

5. В весьма усовершенствованном виде переиздал эти таблицы Питискус (Pitiscus) из Грюнберга в Силезии (1561—1613), каплан пфальцского курфюрста. Снова отпечатанные на средства курфюрста под названием „Thesaurus mathematicus" [1]), эти таблицы содержат тригонометрические числа для интервалов в 10″ с 15 десятичными знаками. Они в гораздо большей степени свободны от ошибок и изданы лучше, чем таблицы Ретикуса.

Мы должны иметь в виду, что все эти таблицы вычислены с помощью одной только формулы для половины дуги и интерполяции, так как тогда еще не были известны бесконечные ряды для синуса и косинуса. Только принимая это во внимание, мы сможем в надлежащей мере оценить то невероятное усердие и ту работу, которые вложены в эти почтенные произведения.

К этим таблицам уже непосредственно примыкают новые таблицы, соединяющие тригонометрические данные с логарифмическими.

---

[1]) Francofurtii 1613

B. Логарифмо-тригонометрические таблицы.

Здесь мы наблюдаем удивительное совпадение, — в известной степени как бы иронию истории: всего лишь год спустя после того, как в руках Питискуса таблицы тригонометрических линий достигли известного совершенства, появляются впервые таблицы логарифмов, делающие первые, собственно говоря, излишними, так как теперь уже нужны не самые синусы и косинусы, а их логарифмы. Прежде всего приходится назвать уже упомянутые мною первые таблицы логарифмов.

1. „Mirifici logarithmorum canonis descriptio" Непера (1614). При этом Непер до такой степени имел в виду прежде всего облегчение тригонометрических вычислений, что сперва дал даже не логарифмы натуральных чисел, а семизначные логарифмы тригонометрических линий для каждой минуты.

2. Впервые придал таблицам логарифмов их обычную теперь форму англичанин Генри Бригг [1]) (Henry Briggs, 1556—1630), находившийся в личных отношениях с Непером. Он понял, какое громадное преимущество имеют для практических вычислений логарифмы с основанием 10, более родственные нашему десятиричному письменному счислению, и ввел поэтому это основание вместо неперова. Таким образом получились „искусственные логарифмы", называемые также „бригговыми". Кроме того, Бригг дает и логарифмы натуральных чисел (а не только логарифмы гониометрических функций). Эти нововведения находятся в его „Arithmetica logarithmica" (Londini 1624). Правда, Бригг не успел закончить всех исчислений и дает только логарифмы целых чисел от 1 до 20 000 и от 90 000 до 100 000, но зато с 14 знаками. Замечательно, что именно в наиболее старых таблицах содержится наибольшее число десятичных знаков, между тем как в новое время в большинстве случаев довольствуются весьма малым числом знаков; к этому я еще вернусь. Бригг вычислил также искусственные логарифмы тригонометрических линий для промежутков в 10″ с 10 знаками и опубликовал в своей „Trigonometria britannica" (Gondae 1633).

---

[1]) Установившаяся русская транскрипция Бригг, а не Бриггс происходит от латинской транскрипции Briggius. *Ред.*

3. Пропуск в таблицах Бригга заполнил впервые голландец Адриан Влакк (Adrian Vlacq), живший в Гуде близ Лейдена — математик, типограф и книгопродавец. Он отпечатал второе издание таблиц Бригга [1]), заключавшее на этот раз логарифмы всех целых чисел от 1 до 100 000, но только с 10 десятичными знаками. Это издание является основой всех наших теперешних таблиц.

Что же касается дальнейшего развития таблиц, то я могу дать только самые общие указания относительно того, в чем заключалось дальнейшее развитие их по сравнению с указанными первыми шагами.

a) Прежде всего существенное значение имел прогресс теории, а именно, логарифмические ряды дали новое, крайне практичное, средство для вычисления логарифмов. Об этом вычислители первых таблиц не знали ничего. Непер, как мы видели, вычислял свои логарифмы с помощью разностного уравнения, — другими словами, посредством последовательного прибавления $\frac{\Delta x}{x}$, пользуясь при этом в большой степени интерполяцией. У Бригга самую важную роль играло извлечение квадратных корней; он пользуется тем, что, зная $\lg a$ и $\lg b$, можно найти $\lg \sqrt{a \cdot b}$ по формуле:

$$\lg \sqrt{a \cdot b} = \frac{1}{2}(\lg a + \lg b).$$

Этим же самым приемом пользовался и Влакк.

b) Значительные успехи были достигнуты путем более целесообразного расположения таблиц, которое дало возможность поместить больше материала на меньшем пространстве и в форме, более доступной обозрению.

c) Но, что важнее всего, значительно возросла правильность таблиц благодаря тому, что ошибки, которые еще часто попадались в старинных таблицах, особенно в последних десятичных знаках, были устранены при помощи внимательной проверки.

Из большого числа возникших таким образом таблиц я назову только самые известные.

[1]) Henr. Briggii, Arithmetica logarithmica. Ed. sec. aucta per Adr. Vlacq. Goudae 1628.

4. „Thesaurus logarithmorum completus" („Полное собрание больших логарифмо-тригонометрических таблиц"), изданные австрийским артиллерийским офицером Вега (Vega) в 1794 г. в Лейпциге. Оригинальное издание стало библиографической редкостью, но в 1896 г. во Флоренции появился фототипный перепечаток. Эти таблицы содержат десятизначные логарифмы натуральных чисел и тригонометрических линий, расположенные по способу, ставшему с тех пор типичным; так, вы видите, например, здесь уже маленькие таблички разностей, предназначенные для облегчения интерполирования.

Переходя к XIX в., мы замечаем широкое популяризирование логарифмов, стоящее в связи, во-первых, с тем, что в 20-х годах логарифмы были введены в школу, а во-вторых, с тем, что логарифмы находят все больше и больше применений в практике физиков и техников. При этом пришлось, конечно, согласиться на значительное сокращение числа знаков, так как и школа и практика нуждались в таблицах, не слишком объемистых; к тому же три или четыре десятичных знака представляют точность, вполне достаточную в большинстве случаев. Правда, в мое школьное время мы пользовались еще семизначными таблицами; в то время в защиту употребления такого числа знаков приводили то соображение, что ученики должны благодаря этому проникнуться „величием чисел". Теперь все настроены утилитарно и всюду пользуются трехзначными, четырехзначными или, самое большее, пятизначными таблицами. Здесь вы видите три взятых наудачу современных издания таблиц. Одно из них — небольшие таблицы Шуберта [1]) с четырмя знаками; в них вы находите применение всевозможных вспомогательных средств, как, например, печатание в две краски, повторение надписей вверху и внизу каждой страницы и тому подобное, — все это для того, чтобы по возможности устранить недоразумения при пользовании таблицами. Еще остроумнее устроены новые американские

[1]) Schubert, Vierstellige Tafeln und Gegentafeln (Samml. Goeschen Leipzig 1898). Новое издание Schubert Haussner под тем же названием. Leipzig 1917.

таблицы Гёнтингтона [1]), в которых, например, страницы снабжены различными придатками и вырезами, позволяющими сразу открывать книгу на нужной странице и т. д. Наконец, вы видите здесь счетную линейку, которая, как известно, представляет не что иное, как трехзначную таблицу логарифмов в самой удобной форме механического счетного аппарата; вам всем, конечно, известен этот инструмент, который теперь всякий инженер всегда имеет при себе для своих расчетов.

Но мы еще не дошли, конечно, в этом направлении до конца и можем даже довольно ясно представить себе, в чем будет состоять дальнейшее развитие, а именно, в последнее время все больше и больше распространяется счетная машина, о которой мы уже говорили; она делает излишними таблицы логарифмов, так как она позволяет производить непосредственное умножение гораздо быстрее и увереннее. Правда, теперь еще счетные машины настолько дороги, что их могут приобретать только крупные учреждения; но когда они станут значительно дешевле, тогда начнется новая фаза в деле вычислений. Что же касается гониометрии, то только тогда будет отдано должное старинным таблицам Питискуса, которые тотчас после своего появления оказались устарелыми. Они дают прямо тригонометрические величины, с которыми счетная машина позволит удобно обходиться, минуя окольный путь, ведущий через логарифмы.

Остается еще рассмотреть применения гониометрических функций.

3. Применения гониометрических функций.

Здесь нас интересуют:

A. Тригонометрия которая вообще послужила поводом к изобретению гониометрических функций.

B. Механика, в которой учение о небольших колебаниях представляет особенно обширную область их применения.

C. Изображение периодических функций посредством тригонометрических рядов, которое, как известно, играет весьма важную роль в самых разнообразных вопросах.

[1]) C. A. Huntington, Four place tables, abrigd. edit. (Cambridge Mass. 1907).

A. Тригонометрия, в особенности сферическая тригонометрия.

Тригонометрия является весьма древней наукой; уже в Египте она достигла высокой степени развития под влиянием запросов двух важных наук: геодезии, нуждающейся в учении о плоских треугольниках, и астрономии, нуждающейся в учении о сферических треугольниках. Существует весьма обстоятельная монография по истории тригонометрии, это—„Лекции по истории тригонометрии" Браунмюля [1]). Наилучшим справочным изданием относительно практической стороны тригонометрии служит „Учебник плоской и сферической тригонометрии" Гаммера [2]), а относительно теоретической стороны — второй том „Энциклопедии элементарной математики" Вебера и Вельштейна [3]).

Характер настоящих лекций не позволяет, конечно, дать систематическое изложение всей тригонометрии; это должно составить предмет специального курса; к тому же ведь здесь, в Геттингене, практической тригонометрии уделяется вполне достаточно внимания на обычных лекциях по геодезии и сферической астрономии. Я же хотел бы поговорить с вами об одной очень интересной главе теоретической тригонометрии, которая, несмотря на свою весьма глубокую древность, все еще не может считаться вполне законченной, так как она до сих пор еще содержит много невыясненных вопросов и проблем сравнительно элементарного характера, обработка которых не кажется мне неблагодарным трудом; я имею в виду сферическую тригонометрию. Этот отдел как раз разработан весьма обстоятельно в книге Вебера-Вель-

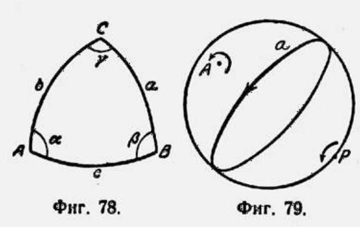
[1]) A. v. Braunmühl, Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie, 2 B-de. Leipzig 1900—1903.

[2]) E. Hammer, Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie, Stuttgart 1906. 5-е изд. в 1923 г.

[3]) „Encyklopedie der element. Geometrie", bearb. von. H. Weber, J. Wellstein, W. Jacobsthal. 2 Aufl., Leipzig 1907. (В русском переводе: „Энциклопедия элементарной математики", т. II, кн. II.)

штейна, а именно, там приняты во внимание те идеи, которые развил Стюди (Study) в своем фундаментальном сочинении: „Сферическая тригонометрия, ортогональные подстановки и эллиптические функции“ [1]). Я попытаюсь представить вам обзор всех относящихся сюда теорий и в особенности указать на вопросы, остающиеся доселе открытыми.

Элементарное понятие о сферическом треугольнике вряд ли нуждается в подробных разъяснениях: три точки на сфере вполне определяют (если только никакие две из них не лежат на концах одного диаметра) треугольник; каждый из трех углов и каждая сторона этого треугольника заключается между 0 и π (фиг. 78).



Фиг. 78. Фиг. 79.

Но при дальнейших исследованиях оказывается целесообразным считать стороны и углы неограниченно переменными величинами, которые могут становиться даже больше π или 2π или кратных 2π; тогда приходится говорить о сторонах, налагающихся на самих себя, и об углах, делающих по нескольку оборотов около вершины. При этом приходится условиться относительно знака этих величин, т. е. относительно того направления, в котором их надо измерять.

Заслуга последовательного проведения принципа знаков, как вообще в геометрии, так и в сферической тригонометрии в частности, принадлежит великому лейпцигскому геометру Мёбиусу (Möbius). Благодаря этому принципу был впервые проложен путь для исследований наиболее общего характера над величинами, неограниченно изменяющимися. Особенное значение в данном отношении имеет статья Мёбиуса: „Вывод основных формул

[1]) Sphärische Trigonometrie, orthogonale Substitutionen und elliptische Funktionen, „Abhandl. der math.-phys. Klasse der K. Sächsischen Gesellschaft d. Wissenschaften, Bd. XX, Nr. II (Leipzig 1893).

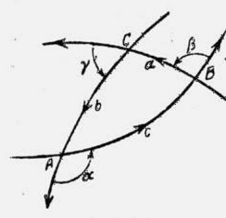
сферической тригонометрии в возможно более общей форме“ [1]).

Эти условия относительно знака начинаются с того, что устанавливают одно определенное направление вращения, при котором углы около всякой точки A на сфере считаются положительными; если это направление указано для одной какой-нибудь точки сферы, то это же самое направление переносят по принципу непрерывного изменения на всякую другую точку сферы (фиг. 79). Можно, например, как обыкновенно делают, считать за положительное направление вращения то, которое при наблюдении с внешней стороны представляется обратным движению часовой стрелки. Во-вторых, необходимо установить для всякого большого круга на сфере определенное направление обхода, но здесь невозможно ограничиться установлением определенного направления для одного какого-нибудь круга и затем непрерывно переходить ко всем другим кругам, так как каждый круг можно привести двумя существенно различными способами к совмещению со всяким другим кругом. Поэтому каждому кругу в отдельности, с которым нам придется иметь дело, мы будем приписывать определенное направление обхода и будем рассматривать один и тот же круг как два различных образа, смотря по тому, какое направление для него мы примем за положительное. Установив такие определения, мы можем каждому большому кругу a однозначно отнести определенный полюс P, а именно, тот из его двух полюсов в обычном смысле слова, из которого его направление представляется положительным; обратно — каждому полюсу соответствует однозначно определенный „полярный круг“ с определенным направлением обхода. Этим вполне однозначно устанавливается столь важный в тригонометрии „процесс полярного преобразования“.

Если даны три какие-нибудь точки A, B, C на сфере (фиг. 80), то для однозначного определения сферического треугольника, имеющего вершины в этих точках, недо-

[1]) „Entwicklung der Grundformeln der sphärischen Trigonometrie in grösstmöglicher Allgemeinheit“, Berichte über die Verhandl. der K. Sächs. Ges. d. Wiss., Math.-phys. Klasse. 1860. Bd. 12 — Ges. Werke II (Leipzig 1886), pag. 71.

стает еще некоторых данных: прежде всего необходимо присвоить каждому из трех больших кругов, проходящих через точки A, B, C, определенное направление, а также нужно указать, сколько раз следует каждый из них обойти в указанном для него направлении, прежде чем притти от B к C от C к A, от A к B. Определенные таким образом длины a, b, c, которые могут иметь любые вещественные значения, называются сторонами сферического треугольника; мы, конечно, будем принимать, что они отнесены к сфере с радиусом 1. При этом углы получают такое определение: угол α получается при таком вращении в положительном направлении, при котором положительное направление дуги CA, кончающейся в A, переходит в положительное направление дуги AB, начинающейся в A; к этому углу еще можно добавить в виде слагаемого любое кратное 2π; аналогично определяются и прочие углы. Рассмотрим обыкновенный элементарный треугольник, как указано на фиг. 80, и установим направления сторон так, чтобы величины сторон a, b, c были меньше π; тогда углы α, β, γ оказываются, согласно нашему новому определению, как это легко видеть, внешними углами треугольника, а не его внутренними углами, как при обычном элементарном определении.



Фиг. 80.

Тот факт, что при такой замене обычно принимаемых углов их дополнениями до π формулы сферической тригонометрии получают более симметричный и более наглядный вид, представляет давно известное явление. Более глубокую причину этого можно видеть в следующем: указанный выше процесс полярного преобразования относит каждому треугольнику, определенному согласно правилам Мёбиуса, вполне однозначно другой треугольник, „полярный" по отношению к первому, и нетрудно видеть, что последний при наших новых определениях попросту имеет углами стороны первоначального треугольника, а сторонами его углы. Поэтому всякая формула, написанная в этих обозначениях, должна иметь место и в том случае, если мы в ней обменяем местами a, b, c с α, β, γ, так что всегда должна иметь место простая симметрия. При обычном элементарном измерении углов и сторон эта простая симметрия не имеет места, так как соотношения между данным треугольником и его полярным треугольником зависят от того, что считают в каждом отдельном случае за углы и стороны, и от выбора того или другого из двух полюсов круга, заданного без определенного направления обхода.

Ясно поэтому, что из шести определенных таким образом элементов сферического треугольника только три можно изменять непрерывным образом независимо один от другого, например две стороны и заключенный между ними угол. Формулы сферической тригонометрии представляют собой известное число соотношений между этими 6 элементами или, вернее, алгебраических соотношений между их 12 косинусами и синусами; эти соотношения позволяют произвольно изменять только 3 из этих 12 величин, тогда как другие 9 находятся в алгебраической зависимости от первых трех. При переходе к косинусу и синусу мы перестаем, разумеется, обращать внимание на то, какое именно кратное 2π служит дополнительным слагаемым. Представляя себе вообще тригонометрию как собрание всевозможных алгебраических соотношений такого рода, мы можем определить следующим образом ее задачу в соответствии с современными взглядами: станем рассматривать величины

$$x_1 = \cos a, x_2 = \cos b, x_3 = \cos c, x_4 = \cos \alpha, x_5 = \cos \beta, x_6 = \cos \gamma,$$
$$y_1 = \sin a, y_2 = \sin b, y_3 = \sin c, y_4 = \sin \alpha, y_5 = \sin \beta, y_6 = \sin \gamma$$

как координаты точки в пространстве 12 измерений R_{12}; совокупность всех тех точек этого пространства, которые соответствуют действительно возможным сферическим треугольникам $a, \ldots, \gamma$, составляет трехмерное алгебраическое многообразие M_3 этого пространства R_{12}, и вот это именно многообразие M_3 в R_{12} и подлежит изучению. Этим сферическая тригонометрия включается в общую аналитическую геометрию многомерных пространств.

Это многообразие M_3 должно обладать различными простыми симметриями. Так, например, процесс полярного преобразования показал, что замена величин a, b, c величинами α, β, γ и обратно всегда дает новый сферический треугольник; по отношению к нашим новым обозначениям это значит, что из всякой точки в M_3 можно получить другую точку, принадлежащую тоже M_3, если заменить x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 величинами x_4, x_5, x_6, y_4, y_5, y_6, и наоборот. Далее всякому треугольнику соответствует семь смежных треугольников, соответственно делению всего пространства на 8 октантов плоскостями трех больших кругов; элементы этих треугольников получаются из элементов первоначального треугольника посредством перемены знака и прибавления π; это дает для каждой точки множества M_3 семь новых точек, координаты которых $x_1, \ldots, y_6$ получаются посредством перемены знака в координатах исходной точки. Совокупность этих симметрий приводит, в конце концов, к некоторой группе перестановок и перемен знака у координат точек R_{12}, которая преобразует многообразие M_3 в самого себя[1]).

Наиболее важным является вопрос о тех алгебраических уравнениях, которым удовлетворяют координаты точек M_3 и которые образуют совокупность тригонометрических формул. Так как всегда $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, то это дает нам прежде всего шесть квадратных соотношений:

$$x_i^2 + y_i^2 = 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, 6), \tag{1}$$

которые, выражаясь геометрически, изображают шесть цилиндрических поверхностей второго порядка $F^{(2)}$ в многообразии M_3.

---

[1]) Если некоторая такая перестановка преобразовывает точку A многообразия M_3 в точку B того же многообразия, а другая перестановка переводит точку B в точку C того же многообразия, то последовательное произволство этих двух перестановок приводит точку A в точку C того же многообразия M_3; это значит, что совокупность этих перестановок такова, что последовательное произволство двух таких перестановок представляет собой также одну из этих перестановок; это обозначает, что перестановки образуют группу; то же относится к надлежащим переменам знаков и комбинациям перестановок с переменами знаков. *Ред.*

Другие шесть формул дает теорема косинусов сферической тригонометрии, которая в наших обозначениях выражается так:

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c - \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha,$$

что при полярном преобразовании дает:

$$\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma - \sin \beta \sin \gamma \cos a.$$

Эти формулы вместе с теми четырьмя, которые получаются при циклической перестановке a, b, c и α, β, γ, определяют в общем шесть поверхностей третьего порядка $F^{(3)}$ в многообразии M_3:

$$x_1 = x_2 x_3 - y_2 y_3 x_4; \quad x_2 = x_3 x_1 - y_3 y_1 x_5; \quad x_3 = x_1 x_2 - y_1 y_2 x_6; \tag{2}$$

$$x_4 = x_5 x_6 - y_5 y_6 x_1; \quad x_5 = x_6 x_4 - y_6 y_4 x_2; \quad x_6 = x_4 x_5 - y_4 y_5 x_3. \tag{3}$$

Наконец, можно еще использовать теорему синусов, которая получается, если приравнять нулю миноры следующей матрицы:

$$\left| \begin{matrix} \sin a, & \sin b, & \sin c \\ \sin \alpha, & \sin \beta, & \sin \gamma \end{matrix} \right| = \left| \begin{matrix} y_1, & y_2, & y_3 \\ y_4, & y_5, & y_6 \end{matrix} \right|.$$

Иначе говоря, эта теорема выражается равенствами:

$$y_2 y_6 - y_3 y_5 = y_3 y_4 - y_1 y_6 = y_1 y_5 - y_2 y_4 = 0. \tag{4}$$

Это дает три поверхности второго порядка $F^{(2)}$, из которых, во всяком случае, только две линейно независимы.

Таким образом в общем мы получили 15 уравнений для точек нашего многообразия M_3 в пространстве R_{12}.

Для выделения из R_{12} трехмерного пространства оказывается, вообще говоря, недостаточно иметь $12 - 3 = 9$ уравнений, так как уже в обыкновенной геометрии пространства R_3, как известно, отнюдь не всякая кривая в пространстве может быть представлена как полное пересечение двух поверхностей; простейшим примером служит пространственная кривая третьего порядка, для определения которой необходимы, по меньшей мере, 3 уравнения. Так и в нашем случае легко видеть, что 9 уравнений (1) и (2) еще не определяют M_3; как известно, из теоремы косинусов можно вывести теорему синусов, не считая одного знака, вопрос о котором разрешают затем при

помощи геометрических соображений. Представляется желательным знать, какие именно уравнения и в каком числе определяют вполне наше многообразие M_3. Вообще, я желал бы формулировать здесь четыре определенных вопроса, на которые, повидимому, в литературе до сих пор еще нет точного ответа; они заслуживают, я думаю, подробного изучения, которое к тому же и не должно представить особенного труда, если только приобретена известная сноровка в обращении с формулами сферической тригонометрии.

Вот эти вопросы:

1. Что надо понимать под „порядком" многообразия M_3?

2. Каковы уравнения самой низкой степени, посредством которых можно представить многообразие M_3 в чистом виде?

3. Какова полная система независимых уравнений, содержащих M_3, т. е. таких уравнений $f_1=0, \ldots, f_n=0$, из которых всякое другое уравнение, изображающее поверхность, проходящую через M_3, может быть составлено линейным образом посредством целых рациональных множителей $m_1 \ldots, m_n$ в виде: $m_1 f_1 + \ldots + m_n f_n = 0$? Для этого может понадобиться больше уравнений, чем сколько требует п. 2.

4. Какие алгебраические тождества [так называемые сизигии (Syzygieen)] имеют место между этими n формами $f_1 \ldots, f_n$?

Во всех этих вещах можно ориентироваться с помощью уже произведенных исследований, которые преследуют ту же самую цель, хотя исходят из несколько иной постановки вопроса. Эти исследования содержатся в геттингенской диссертации Chisholm (теперь Joung), написанной в 1894 г. „Algebraisch gruppentheoretische Untersuchungen zur sphärischen Trigonometrie", Göttingen 1895. Это — первая диссертация в Пруссии, написанная женщиной. Среди различных приемов, применяемых Chisholm, наиболее замечательный состоит в том, что за независимые координаты она принимает котангенсы половин углов и дуг; действительно, ввиду того, что основной функцией является $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, а следовательно, и $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, и что через

нее однозначно выражаются $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$, оказывается возможным записать всякое тригонометрическое равенство в виде алгебраического соотношения между $\operatorname{ctg}\frac{a}{2}, \ldots, \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$. Поэтому сферические треугольники представляют теперь трехмерное алгебраическое многообразие M_3 в шестимерном пространстве R_6, которое имеет координатами $\operatorname{ctg}\frac{a}{2}$, $\operatorname{ctg}\frac{b}{2}$, $\operatorname{ctg}\frac{c}{2}$, $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$, $\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$. Chisholm показала, что это многообразие M_3 имеет порядок, равный 8, и что оно может быть представлено как полное пересечение трех поверхностей второго порядка (квадратных уравнений) в пространстве R_6. Автор исследует еще дальнейшие вопросы, которые примыкают сюда же, в смысле выше формулированной точки зрения.

В своих лекциях о гипергеометрической функции[1]) я назвал те формулы сферической тригонометрии о которых я до сих пор говорил и которые связывают синусы и косинусы сторон и углов, формулами первой ступени; им противопоставляют группу существенно других формул под именем формул второй ступени. Эти формулы представляют собой алгебраические уравнения, которым подчинены тригонометрические функции половин углов и сторон; поэтому при изучении последних представляется наиболее удобным рассматривать 12 величин:

$$\cos\frac{a}{2},\ \sin\frac{a}{2}, \ldots,\ \cos\frac{\alpha}{2},\ \sin\frac{\alpha}{2}, \ldots$$

как координаты нового двенадцатимерного пространства R_{12}', в котором сферические треугольники снова образуют трехмерное алгебраическое многообразие M_3'. На первом месте здесь стоят прежде всего те изящные формулы, которые были опубликованы в начале прошлого столетия почти одновременно и независимо друг от друга Деламбром (Delambre, 1807), Молльвейде (Mollweide, 1808) и, наконец, Гауссом (Gauss, 1809) в его сочинении: „Theoria motus corporum coelestium", № 54 (перепечатано в „Werke",

---

[1]) Зимний сем. 1893/94 г.; лекции обработаны Ритером (E. Ritter), переиздано в Лейпциге в 1906 г.

Bd. VII, Leipzig 1906, pag. 67). Это — 12 формул, получаемых посредством круговой перестановки из формул:

$$\frac{\sin\frac{\beta+\gamma}{2}}{\sin\frac{a}{2}} = \pm\frac{\cos\frac{b-c}{2}}{\cos\frac{a}{2}},\quad \frac{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\frac{a}{2}} = \mp\frac{\sin\frac{b-c}{2}}{\sin\frac{a}{2}},$$

$$\frac{\cos\frac{\beta+\gamma}{2}}{\cos\frac{a}{2}} = \mp\frac{\cos\frac{b+c}{2}}{\cos\frac{a}{2}},\quad \frac{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos\frac{a}{2}} = \pm\frac{\sin\frac{b+c}{2}}{\sin\frac{a}{2}}.$$

Нечто существенное и новое по сравнению с формулами первой ступени представляет здесь двойной знак, который надо понимать следующим образом: для одного и того же треугольника имеют место одновременно все верхние или все нижние знаки во всех 12 формулах; при этом оказывается, что существуют треугольники как того, так и другого рода. Таким образом множество M_3' сферических треугольников в определенном выше пространстве R_{12}' определяется двумя совершенно различными системами, состоящими из 12 кубических уравнений каждая, и распадается поэтому на два отдельных алгебраических многообразия: M_3, для которого имеет место один знак, и $\overline{\overline{M}}_3$, для которого надо брать другой знак. Благодаря этому замечательному обстоятельству упомянутые формулы приобретают особенно важное значение в теории сферических треугольников; они представляют нечто гораздо большее, чем простое преобразование прежних уравнений годное — самое большее — для облегчения тригонометрических вычислений, как полагали Деламбр и Молльвейде. Гаусс первый взглянул на дело глубже; действительно, он указывает на возможность перемены знака, „если придавать идее сферического треугольника ее наибольшую общность". Поэтому мне кажется вполне справедливым называть эти формулы формулами Гаусса, хотя и не ему принадлежит приоритет их опубликования.

Но впервые понял все значение этого обстоятельства Стюди (Study) и разъяснил его в своей уже цитированной

нами работе 1894 г. Его главный результат наиболее удобно можно выразить, если исходить из пространства шести измерений R_6, для которого координатами служат сами значения $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$, рассматриваемые как неограниченно изменяющиеся переменные; мы будем называть их **трансцендентными определяющими элементами** треугольника в отличие от **алгебраических определяющих элементов** $\cos a, \ldots$ или $\cos\frac{a}{2}, \ldots$, так как первые представляют трансцендентные, а вторые — алгебраические функции обыкновенных пространственных координат вершин треугольника. В этом пространстве R_6 совокупность всех сферических треугольников представляет „трансцендентное многообразие $M_3^{(t)}$, отображением которого в пространстве R_{12}' служит определенное выше алгебраическое многообразие M_3'. Но так как последнее распадается на два многообразия, а отображающие функции $\cos\frac{a}{2}, \ldots$ представляют однозначные и непрерывные функции трансцендентных координат, то и трансцендентное многообразие $M_3^{(t)}$ должно распадаться на две отдельные части. Самая теорема Стюди заключается в следующем: трансцендентное многообразие $M_3^{(t)}$ всех величин $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$, какие только могут быть элементами сферического треугольника самого общего рода, распадается, соответственно двойному знаку в формулах Гаусса, на две отдельные части, которые, однако, представляют каждая сплошной континуум. Наиболее важным является здесь невозможность никакого дальнейшего распадения; это значит, что дальнейший анализ тригонометрических формул не может привести к подобным и столь же глубоким подразделениям сферических треугольников. Треугольники первой группы, соответствующей верхнему знаку в формулах Гаусса, называют **собственными** треугольниками, а треугольники второй группы — **несобственными**, так что теорему Стюди можно выразить так: **совокупность всех сферических треугольников распадается на континуум собственных и на континуум несобственных треугольников.** Относящиеся сюда подробности и доказательство теоремы Стюди вы найдете

у Вебера-Вельштейна (т. II, § 47). Я же сообщаю здесь только результаты в возможно кратком обзоре.

Теперь я остановлюсь подробнее на различении обоих родов треугольников: если имеется какой-нибудь сферический треугольник, т. е. „допустимая система значений" величин $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$, косинусы и синусы которых удовлетворяют формулам первой ступени и которые поэтому представляют некоторую точку в многообразии $M_3^{(I)}$, то каким образом можем мы решить вопрос о том, является ли этот треугольник собственным или несобственным? С этой целью образуем прежде всего наименьшие положительные вычеты $a_0, b_0, c_0, \alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ данных чисел по модулю 2π:

$$0 \leqslant a_0 < 2\pi, \ldots, \; 0 \leqslant \alpha_0 < 2\pi, \ldots$$
$$a_0 \equiv a \pmod{2\pi}, \ldots, \; \alpha_0 \equiv \alpha_0 \pmod{2\pi}, \ldots$$

Косинусы и синусы этих вычетов равны тем же тригонометрическим величинам для $a, \ldots, \alpha, \ldots$, так что они, в свою очередь, образуют сферический треугольник, который мы назовем приведенным или мёбиусовым треугольником, соответствующим первому треугольнику, так как сам Мёбиус не рассматривал треугольников с элементами, превосходящими 2π. Решим прежде всего с помощью небольшой таблицы вопрос о том, в каких случаях треугольник Мёбиуса является собственным и когда он принадлежит к числу несобственных. Такую табличку вы можете найти и у Вебера-Вельштейна, но только в не столь наглядной форме (стр 53 и 84 русского издания 2-го выпуска II тома „Энциклопедии"), где также (стр. 92—93) помещены рисунки различных типов собственных и несобственных треугольников. Мы находим по четыре типа треугольников каждого рода:

I. Собственные треугольники Мёбиуса:

1) 0 сторон $> \pi$, но $< 2\pi$; 0 углов ...... $> \pi$, но $< 2\pi$
2) 1 сторона $> \pi$, „ $< 2\pi$; 2 прилежащих угла $> \pi$ но $< 2\pi$
3) 2 стороны $> \pi$, „ $< 2\pi$; 1 заключенный угол $> \pi$, но $< 2\pi$
4) 3 стороны $> \pi$, „ $< 2\pi$; 3 угла .... $> \pi$, но $< 2\pi$

II. Несобственные треугольники Мебиуса:

1) 0 сторон $> \pi$ но $< 2\pi$; 3 угла .... $> \pi$ но $< 2\pi$
2) 1 сторона $> \pi$ „ $< 2\pi$; 1 противолежащий угол $> \pi$ но $< 2\pi$
3) 2 стороны $> \pi$ „ $< 2\pi$; 2 „ „ $> \pi$ но $< 2\pi$
4) 3 стороны $> \pi$ „ $< 2\pi$; 0 углов .... $> \pi$ но $< 2\pi$

Других случаев, кроме здесь перечисленных, не существует, так что с помощью этой таблички вполне решается вопрос о том, к которому из двух видов принадлежит данный треугольник Мёбиуса.

Согласно сказанному выше, переход к треугольнику общего вида $a, \ldots, \alpha, \ldots$: от соответствующего треугольника Мёбиуса производится посредством следующего рода формул:

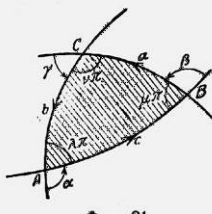
$$a = a_0 + n_1 \cdot 2\pi, \quad b = b_0 + n_2 \cdot 2\pi, \quad c = c_0 + n_3 \cdot 2\pi,$$
$$\alpha = \alpha_0 + \nu_1 \cdot 2\pi, \quad \beta = \beta_0 + \nu_2 \cdot 2\pi, \quad \gamma = \gamma_0 + \nu_3 \cdot 2\pi,$$

причем имеет место теорема: треугольник общего вида оказывается одноименным с приведенным треугольником (т. е. одновременно с ним собственным или несобственным), если сумма шести целых чисел $n_1 + n_2 + n_3 + \nu_1 + \nu_2 + \nu_3$ есть четное число, и разноименным, когда это число нечетное. Таким образом характер каждого треугольника оказывается вполне определенным.

Я закончу этот отдел несколькими замечаниями о площади сферических треугольников. Об этом совершенно не упоминают ни Стюди в своих исследованиях, ни Вебер-Вельштейн; но это понятие играет большую роль в моих прежних исследованиях в области теории функций о треугольниках, составленных из круговых дуг. В то время как до сих пор треугольник представлял собою в наших глазах не что иное, как соединение трех углов и трех сторон, удовлетворяющих теоремам косинусов и синусов,— здесь идет речь об определенной части поверхности, ограниченной этими сторонами и представляющей как бы мембрану (перепонку), натянутую между тремя сторонами с соответствующими углами.

Конечно, здесь не имеет смысла рассматривать „внешние" углы α, β, γ треугольника, как мы делали раньше

ради симметрии; теперь речь будет итти о тех углах, которые сама мембрана образует у вершин; для краткости мы будем называть их „внутренними" углами треугольника. Я привык обозначать их посредством $\lambda \cdot \pi$, $\mu \cdot \pi$, $\nu \cdot \pi$ (фиг. 81). И эти углы можно рассматривать как неограниченно изменяемые исключительно положительные величины, так как мы не хотим исключать и того случая, когда вершины мембраны служат точками свивания поверхности. Аналогично этому, обозначим абсолютные длины сторон через $l\pi$, $m\pi$, $n\pi$; это тоже неограниченно изменяемые положительные величины. Но теперь уже углы и стороны не могут, как раньше, покрывать сами себя неограниченное число раз независимо друг от друга; иными словами — получать в виде слагаемого произвольные кратные 2π; тот факт, что должна существовать одна сплошная мембрана с этими углами и сторонами, находит свое выражение в известных соотношениях между этими множителями при 2π; эти соотношения я назвал в моей работе „О нулевых точках гипергеометрического ряда"[1]) дополнительными соотношениями сферической тригонометрии. Они имеют следующий вид, если через $E(x)$ обозначить наибольшее целое положительное число, содержащееся в $x\,(E(x) \leqslant x)$:



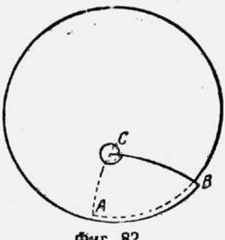
Фиг. 81.

$$E\left(\frac{l}{2}\right) = E\left(\frac{\lambda - \mu - \nu + 1}{2}\right),$$
$$E\left(\frac{m}{2}\right) = E\left(\frac{-\lambda + \mu - \nu + 1}{2}\right),$$
$$E\left(\frac{n}{2}\right) = E\left(\frac{-\lambda - \mu + \nu + 1}{2}\right),$$

и так как, например, $E\left(\frac{l}{2}\right)$ обозначает число слагаемых, равных 2π каждое, содержащихся в стороне $l \cdot \pi$, то эти соотношения как раз выражают искомые кратные 2π, содержащиеся в сторонах $l\pi$, $m\pi$, $n\pi$, если известны углы $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ с содержащимися в них кратными 2π. В частности нетрудно видеть, что при положительных λ, μ, ν, может быть положительным, самое большее, одно из трех чисел $\lambda - \mu - \nu$, $-\lambda + \mu - \nu$, $-\lambda - \mu + \nu$, так что только один из трех аргументов в правых частях равенств может быть больше единицы; а так как при $x < 1$ всегда $E(x) = 0$, то только одно из трех упомянутых кратных 2π может быть отлично от нуля. Итак, у треугольной мембраны только одна сторона может превосходить 2π, а именно сторона наибольшего угла.

1) „Über die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe" („Math. Ann. 37, 1888). Перепечатано в „Gesam. Mathem. Abhandlungen", II стр. 550.

Что же касается доказательства этих дополнительных соотношений, то я отсылаю интересующихся к моим литографированным лекциям „О гипергеометрической функции"[1]); впрочем, в них, как и в упомянутой выше работе, тема разработана гораздо шире, чем я указал здесь, а именно, я там рассматриваю такие „сферические треугольники", которые ограничены любыми окружностями, а не только дугами больших кругов. Здесь же я хочу только в нескольких словах охарактеризовать ход мыслей в этом доказательстве. Исходят от элементарного треугольника, на который, конечно, всегда можно натянуть мембрану, и из нее получают последовательно мембраны самого общего вида, а именно присоединяя по несколько раз надлежащим образом мембраны, имеющие форму круга, с точками разветвления в вершинах. Фиг. 82 показывает, в виде примера, — в стереографической проекции, — треугольник ABC, полученный из элементарного треугольника через присоединение полусферы, ограниченной большим кругом AB, вследствие чего как сторона AB, так и угол C по одному разу покрывают сами себя. Легко видеть, что при этом процессе дополнительные соотношения оста-

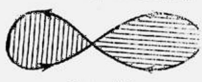


Фиг. 82.

1) Winter-Semester 1893/1894, ausgearb. von E. Ritter. Neudruck Leipzig 1906, pag. 384 ff.

ются в силе; оказывается, что это имеет место и для треугольных мембран самого общего вида, какие только можно построить посредством подобных процессов.

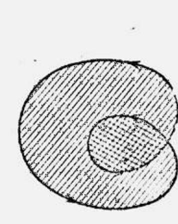
Теперь мы должны точнее присмотреться к тому, какое место занимают эти треугольники с дополнительными соотношениями в описанной выше общей теории. Очевидно, они представляют собой только частные случаи, а именно — ввиду того, что вообще числа, показывающие, сколько раз стороны и углы сами себя покрывают, вполне произвольны,— такие частные случаи, которые характеризуются именно возможностью обтянуть треугольник мембраной. Конечно, на первый взгляд это вызывает недоумение: в самом деле, как мы видели выше, все собственные треугольники, даже и те, которые вовсе не удовлетворяют дополнительным соотношениям, образуют один континуум, так что каждый из них может быть получен посредством непрерывного изменения из элементарного треугольника; поэтому казалось бы, что мембрана, натянутая на элементарный треугольник, не может при этом процессе погибнуть. Объяснение этому затруднению получим, если применим принцип Мёбиуса определения знака и к площадям: а именно, площадь надо считать положительной, или отрицательной смотря по тому, обходят ли ее в положительном (против движения стрелки часов) или в отрицательном направлении. Если кривая, пересекая самое себя, ограничивает несколько частей поверхности, то вся ограничиваемая ею площадь равна алгебраической сумме площадей отдельных частей. На фиг. 83 надо брать разность, а на фиг. 84 сумму площадей обеих частей. Конечно, эти определения представляют лишь геометрическое выражение того, что само собой вытекает из аналитического определения площади.



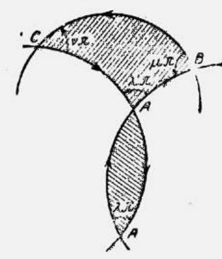
Фиг. 83.

Применяя эти результаты в частности к сферическим треугольникам, найдем, что, действительно, каждому собственному треугольнику можно отнести определенную площадь на сфере, но только при этом при однократном обходе периферии треугольника одни части этой площади приходится обходить в положительном, другие же — в отрицательном направлении, и поэтому при подсчете им

следует приписывать различные знаки. Те треугольники, для которых имеет место дополнительное соотношение, отличаются только тем, что они состоят из одной только мембраны, обегаемой в положительном направлении; этим, именно, свойством и объясняется их большое значение для целей теории функций, ради которых я их и приводил раньше.



Фиг. 84.



Фиг. 85.

Теперь я хотел бы пояснить эти вещи на одном примере. Рассмотрим треугольник AEC, изображенный на фиг. 85 в стереографической проекции, причем A есть более удаленная от дуги EC точка пересечения больших кругов BA и CA; вторая точка пересечения обозначена буквой A'. Внутренние углы треугольника $\mu\pi$, $\nu\pi$ измеряют вращение стороны AB до совпадения с EC и стороны BC до совпадения с CA; оба они положительны. Наоборот, угол $\lambda\pi$, на который надо повернуть сторону CA, чтобы привести ее в совпадение со стороной AB, надо, согласно правилу Мёбиуса, считать отрицательным; положим $\lambda = -\lambda'$. Треугольник $A'EC$ представляет, очевидно, элементарный треугольник с углами $\lambda'\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ которые все положительны. При обходе треугольника ABC в указанном направлении приходится треугольник $A'EC$ обходить в положительном, а сферический двусторонник AA' в отрицательном направлении, так что за площадь треугольника надо считать, согласно условиям Мёбиуса, разность этих двух частей сферы. Это распадение треугольной мембраны на положительную и отрицательную часть можно, пожалуй,

сообразно направлению обхода периферии, представить себе наглядно, принимая, что мембрана перекручена в точке A', так что нижний двусторонник оказывается обращенным своей задней, отрицательной, стороной кверху. Нетрудно составить и более сложные примеры в том же роде.

В заключение я хочу показать на этом же примере, что при этом обобщенном определении площади остается в силе элементарная формула площадей сферической тригонометрии. Как известно, площадь сферического треугольника с углами $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ на сфере радиуса 1 равна так называемому „сферическому избытку" $(\lambda+\mu+\nu-1)\pi$, поскольку $\lambda, \mu, \nu > 0$. Убедимся же в том, что эта формула справедлива и для нашего треугольника ABC. Действительно, площадь элементарного треугольника $A'BC$ равна $(\lambda'+\mu+\nu-1)\pi$; из нее надо вычесть площадь сферического двусторонника AA' с угловым отверстием $\lambda'\pi$, равную $2\lambda'\pi$ (ибо площадь двусторонника пропорциональна его углу, и при угле в 2π она равна поверхности всей сферы, т. е. 4π). Получается следующая величина поверхности треугольника ABC:

$$(\lambda'+\mu+\nu-1)\pi-2\lambda'\pi=(-\lambda'+\mu+\nu-1)\pi=(\lambda+\mu+\nu-1)\pi.$$

Аналогично этому, если попробовать натянуть мембрану из нескольких кусков на собственный треугольник с произвольными углами и сторонами и затем определить на основании правила знаков площадь как алгебраическую сумму отдельных частей, то представляется вероятным, что формула $(\lambda+\mu+\nu-1)\pi$ окажется справедливой, причем разумеется, $\lambda\pi, \ldots$ надо рассматривать как действительные углы мембраны, а не как ее внешние углы.

Относящиеся сюда исследования, еще, правда, не выполнены, но, наверное, не представляют очень больших трудностей и я считал бы весьма желательным, чтобы этим вопросом занялись. Особенно важно было бы выяснить роль несобственных треугольников.

На этом я оставляю область тригонометрии и обращаюсь ко второму важному приложению теории гониометрических функций, так же относящемуся к области школьного преподавания.

B. Учение о небольших колебаниях, в особенности о колебаниях маятника.

Прежде всего я напомню вам вкратце тот вывод закона колебаний маятника, который мы обыкновенно излагаем в университете, пользуясь исчислением бесконечно-малых. Предположим, что маятник висит на нити, длина которой равна l; обозначим через φ угол, который маятник составляет с положением равновесия (фиг. 86). Так как на маятник действует сила тяжести g, направленная вертикально вниз, то, согласно основным уравнениям механики, движение маятника определяется следующим уравнением:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}=-\frac{g}{l}\sin\varphi. \qquad (1)$$

Фиг. 86.

Для небольших колебаний можно с достаточным приближением заменить $\sin\varphi$ через φ, что дает для так называемых бесконечно малых колебаний маятника такое уравнение:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}=-\frac{g}{l}\cdot\varphi. \qquad (2)$$

Общий интеграл этого уравнения выражается, как известно, посредством круговых функций, которые таким образом, играют здесь роль, — как мы уже указывали, — именно благодаря их диференциальным свойствам (появление тригонометрической величины $\sin\varphi$ в уравнении (1) не играет здесь роли); именно, общий интеграл имеет вид:

$$\varphi=A\sin\sqrt{\frac{g}{l}}\,t+B\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t,$$

где A, B обозначают произвольные постоянные, или иначе

$$\varphi=C\cdot\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,(t-t_0),$$

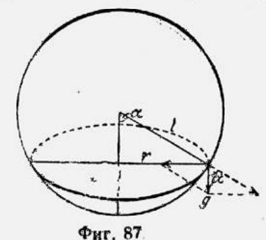
где постоянная C называется амплитудой, а t_0 — фазой колебания; отсюда получаем для времени полного колебания величину:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Но совершенно иначе, — по сравнению с этими простыми и ясными рассуждениями, которые, конечно, становятся еще нагляднее при более обстоятельном изучении вопроса, — складывается так называемое „элементарное" изложение закона качаний маятника, принятое в школе. При этом изложении хотят совершенно избегнуть всякого последовательного применения исчисления бесконечно малых, между тем как физика как раз здесь, в силу внутренней природы ее проблем, повелительно требует применения методов бесконечно малых; в результате оказывается, что прибегают к помощи специального приема, изобретенного ad hoc и содержащего идеи анализа бесконечно малых, но только не называют их собственным именем. Разумеется, при этом получается крайне сложное построение, если только от него требуется действительная точность; поэтому на деле этот прием излагают большей частью с такими пропусками, что, собственно говоря, вряд ли можно говорить о доказательстве закона колебаний маятника. Таким образом получается такое курьезное явление: один и тот же учитель на одном уроке — математики — наиболее требовательно относится к логической строгости доказательств, которой по его мнению, унаследованному от традиций XVIII века, не удовлетворяет исчисление бесконечно малых, а на следующем уроке — физики — прибегает к крайне сомнительным заключениям и к самому смелому применению бесконечно малых. Критическое рассмотрение „элементарных" способов изложения учения о маятнике содержится в очень интересном этюде Тимердинга[1]), озаглавленном „Математика в учебниках физики" (стр. 49 и сл.). В нем содержатся вообще подробные исследования математических методов, по традиции сохраняющихся в преподавании физики; при этом все снова и снова обнаруживается, до чего всякое рассуждение здесь затрудняет; даже удовлетворительное изложение становится часто совершенно невозможным благодаря такому искусственному исключению исчисления бесконечно малых из элементарного преподавания.

[1]) H. E. Timerding, Die Mathematik in den physikalischen Lehrbüchern, Bd. III, Heft 2 цитированных выше „Abhandlungen der JMUK" (Leipzig u. Berlin, 1910).

Разрешите мне, со своей стороны, для лучшего уяснения изложить в нескольких словах ход мыслей в таком элементарном выводе закона колебаний маятника, который действительно применяется в учебниках и в школе. В этом доказательстве исходят из конического маятника; так называют пространственный маятник, который с равномерной скоростью v описывает окружность вокруг вертикальной оси, так, что нить маятника описывает при этом поверхность круглого конуса (фиг. 87). Такое движение в механике называют правильной прецессией. Возможность такого движения в школе считают, конечно, установленной опытом и задаются лишь вопросом о том, какие соотношения имеют место между скоростью v и постоянным отклонением маятника от вертикали $\varphi = \alpha$ (т. е. углом, измеряющим отверстие конуса, описываемого нитью). Начинают с того, что находят для радиуса круга, описываемого маятником, величину $r = l \cdot \sin\alpha$, где вместо $\sin \alpha$ можно вставить α, если предположить, что угол α достаточно мал. Затем говорят о центробежной силе и выводят формулу, согласно которой наша точка описывающая окружность со скоростью v, развивает центробежную силу, равную



Фиг. 87

$$\frac{v^2}{r} = \frac{v^2}{l.\alpha}.$$

Чтобы движение не нарушилось, ее должна уравновешивать равная по величине сила, направленная к центру окружности, — так называемая центростремительная сила. Но последней является слагающая силы тяжести, расположенная в плоскости окружности и равная $g \cdot tg\alpha$, что при достаточно малом α можно положить равным $g \cdot \alpha$. Таким образом получаем искомое соотношение в следующем виде:

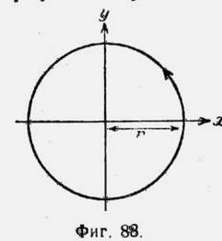
$$\frac{v^2}{l\alpha} = g \cdot \alpha \quad \text{или} \quad v = \alpha \sqrt{g \cdot l}.$$

Отсюда находим, что время одного колебания маятника T, т. е. то время, в течение которого маятник описывает полную окружность $2\pi r = 2\pi l\alpha$, равно:

$$T = \frac{2\pi l\alpha}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}};$$

другими словами, конический маятник совершает в случае достаточно малых отклонений α — правильную прецессию с определенным периодом, величина которого не зависит от α.

Если мы хотим подвергнуть критике уже эту часть вывода, то прежде всего, замену $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$ через α мы можем признать допустимой; такую замену мы сами совершали в нашем точном выводе (стр. 281); действительно благодаря ей получается переход от „конечных" колебаний к „бесконечно малым" колебаниям. В противоположность этому, формула центробежной силы может быть получена „элементарным путем" только ценой различных неточностей, которые находят свое истинное обоснование лишь в диференциальном исчислении. А именно, уже определение центробежной силы нуждается в сущности даже в понятии второй производной, так что при элементарном выводе приходится исказить и последнее. Вследствие этого возникают — за невозможностью ясно выразить то, о чем идет речь — огромные затруднения для понимания, которые при применении диференциального исчисления совершенно не имели бы места. Мне не приходится входить здесь в детали, тем более, что я могу указать вам на очень легко написанные программные статьи покойного директора реальной гимназии в Гюстрове (Güstrow) Зегера (H. Seeger)[1], в которых, между



Фиг. 88.

[1]) Ueber die Stellung des hiesigen Realgymnasiums zu einem Beschlusse der letzten Berliner Schulconferenz. Güstrow 1891. Schulprorg. № 649. Ueber die Stellung des hiesigen Realgymnasium zu dem Erlass des preussischen Unterrichtsministeriums von 1892 (1893, № 653). Bemerkungen über Abgrenzung und Verwertung des Unterrichts in den Elementen der Infinitesimalrechnung (1894, № 658)

прочим, подвергнуты подробной критике, соответствующей нашей точке зрения, различные выводы формулы центробежной силы.

Но на этом еще далеко не кончается вывод закона колебаний маятника. Мы показали только возможность равномерного движения по кругу, которое на языке аналитической механики изображается нижеследующими уравнениями, если возьмем оси xy в плоскости этого круга (т. е. при наших упрощениях, в плоскости касательной к сфере) (фиг. 88):

$$\left.\begin{aligned} x &= l\cdot\alpha\cdot\cos\sqrt{\frac{g}{l}}(t-t_0), \\ y &= l\cdot\alpha\cdot\sin\sqrt{\frac{g}{l}}(t-t_0). \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Но мы желаем получить плоские качания маятника, другими словами, тяжелая точка маятника должна двигаться по нашей плоскости xy вдоль одной прямой — оси x; а чтобы при отклонении $\varphi = \frac{x}{l}$ получилось верное уравнение (3), его уравнение движения должно иметь такой вид:

$$x = l\cdot C\cdot\cos\sqrt{\frac{g}{l}}(t-t_0),\ y = 0. \qquad (5)$$

Итак, нам надо от уравнений (4) притти к уравнениям (5), причем мы не должны пользоваться диференциальными уравнениями динамики. Этого достигают, вводя принцип наложения небольших колебаний, согласно которому, если возможны два движения x, y и x_1, y_1, то возможно и движение $x + x_1$, $y + y_1$. А именно, мы можем комбинировать левовращательное движение маятника, выражаемое уравнениями (4), с правовращательным движением, определяемым такими уравнениями:

$$x_1 = l\alpha\cos\sqrt{\frac{g}{l}}(t-t_0),\ y = -l\alpha\sin\sqrt{\frac{g}{l}}(t-t_0).$$

В результате, если взять $\alpha = \frac{c}{2}$, то движение $x + x_1, y + y_1$ в действительности представляет то колебательное дви-

жение маятника, выражаемое уравнениями (5), которое мы хотели вывести.

При критике этих рассуждений прежде всего возникает, конечно, вопрос о том, каким образом можно обосновать или, по крайней мере, сделать правдоподобным, не пользуясь диференциальным исчислением, принцип наложения колебаний. Но, главным образом, при всех таких элементарных приемах изложения всегда возникает вопрос о том, не могут ли такие последовательно допускаемые неточности привести в результате к заметной ошибке, хотя бы в отдельности эти неточности и были допустимы. Подробнее останавливаться на этом мне не приходится, так как эти вопросы столь элементарны, что всякий из вас может самостоятельно продумать их до конца, раз ваше внимание на них обращено. Я же хотел бы еще раз отметить, что здесь речь идет о следующем центральном пункте проблемы преподавания: с одной стороны, здесь ясно выступает потребность принимать во внимание исчисление бесконечно малых, а с другой стороны, обнаруживается необходимость введения гониометрических функций в общем виде, независимо от их специального применения к геометрии треугольника.

Теперь я перейду к последнему из тех применений гониометрических функций, о которых я имел в виду говорить.

C. Изображение периодических функций посредством рядов из гониометрических функций (тригонометрические ряды).

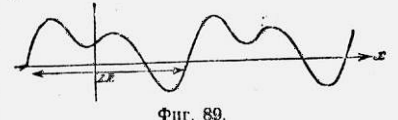
Как известно, в астрономии и в математической физике во множестве случаев приходится рассматривать и вычислять периодические функции, и вот здесь-то упомянутое в заглавии изображение и представляет самое главное и постоянно применяемое средство исследования.

Представим себе, для большего удобства, что единица меры выбрана так, что период данной периодической функции $y = f(x)$ равен 2π (фиг. 89). Вопрос заключается в том, нельзя ли такую функцию $f(x)$ приближенно изобразить посредством агрегата косинусов и синусов целочисленных кратных 2π, вплоть до первой, второй, . . ., вообще n-й кратности, в соединении с подходяще выбранными постоянными множителями; другими словами, нельзя ли заменить $f(x)$ с достаточно малой ошибкой выражением такого вида:

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots + a_n \cos nx + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \dots + b_n \sin nx. \qquad (1)$$

В постоянный член вводят множитель $1/2$ с тем, чтобы приводимое ниже выражение для коэфициентов было действительно вполне общим.

Прежде всего, я должен снова пожаловаться на изложение, принятое в учебниках. А именно, вместо того чтобы поставить на первый план только что указанную элементарную проблему, авторы учебников считают единственным заслуживающим внимания примыкающий сюда теоретический вопрос о том, **нельзя ли изобразить** $f(x)$ **точно посредством бесконечного ряда**; так смотрит на дело даже Шефферс (Scheffers), который, как я недавно говорил, отлично понимает дух элементарного изложения. Похвальное исключение представляет Рунге (Runge) в своей книге „Теория и практика рядов"[1]. Но сама по себе такая постановка вопроса для практических целей совершенно лишена интереса, ибо на практике можно суммировать только конечное и то только не слишком большое число членов; решение указанного теоретического вопроса совершенно не позволяет само по себе судить о практической пригодности ряда: действительно, из сходимости ряда никоим образом нельзя заключать, что его первые члены выражают сумму ряда хотя бы с самым грубым приближением; точно так же, как и, обратно, несколько первых членов расходящегося ряда могут быть весьма пригодными для практического выражения функции. Я нахожу нужным особенно подчеркнуть это, так как тот, кто знаком только с таким обыч-



Фиг. 89.

[1]) Theorie und Praxis der Reihen «Sammlung Schubert» 32, Leipzig 1904.

ным изложением и затем, проделывая физический практикум (общий курс измерительных опытов по физике), хочет на деле применить конечные тригонометрические ряды, обыкновенно вводит сам себя в заблуждение такими ложными заключениями.

Еще поразительнее покажется это обычное пренебрежение конечными тригонометрическими рядами, если вспомним, что их уже с давних пор подвергали самостоятельному изучению. Основы этого изучения дал астроном Бессель еще в 1815 г. Подробности относительно истории и литературы этих вопросов вы найдете в статье Буркхардта (Burkhardt) о „тригонометрической интерполяции" в „Encykl. d. Mathem. Wissensch.", II A 9, pao. 642 ff. Впрочем, те формулы, о которых здесь идет речь, в сущности совпадают с теми, которые встречаются при обычных доказательствах сходимости, но только те идеи, которые мы с ними соединяем, приобретают здесь иную окраску и облегчают практическое пользование этими вещами.

Теперь я перейду к ближайшему рассмотрению нашей темы и начну с вопроса о наиболее целесообразном определении коэфициентов a, b при данном числе членов n. Для этой цели уже Бессель выработал одну идею, примыкающую к методу наименьших квадратов. Погрешность, которую мы совершаем, заменяя $f(x)$ в точке x суммой $2n+1$ тригонометрических функций — обозначим ее через $S(x)$ — равна $f(x)-S(x)$; мерой пригодности изображения функции $f(x)$ во всем промежутке $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, составляющем один период, может служить сумма квадратов всех ошибок, т. е. интеграл:

$$I = \int_0^{2\pi} \left(f(x) - S_n(x) \right)^2 dx.$$

Наиболее целесообразное приближение значений функции $f(x)$ доставит, следовательно, та сумма $S(x)$, для которой этот интеграл I получает наименьшее значение; на основании этого требования Бессель определил значение всех $2n+1$ коэфициентов $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$. В самом деле, необходимые условия минимума I как

функции наших $2n+1$ величин выражаются такими уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial a_0} = 0, \ \frac{\partial I}{\partial a_1} = 0, \ldots, \frac{\partial I}{\partial a_n} = 0, \\ \frac{\partial I}{\partial b_1} = 0, \ldots, \frac{\partial I}{\partial b_n} = 0. \end{aligned}\right| \quad (2)$$

Так как I представляет собой квадратичную, существенно неположительную функцию переменных $a_0, \ldots, b_n$, то нетрудно видеть, что те значения этих переменных, которые получаются из уравнений (2), доставляют для I действительный минимум.

Если выполнить диференцирование под знаком интеграла, то уравнения (2) примут такой вид:

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \left(f(x) - S_n(x) \right) dx = 0, \\ &\int_0^{2\pi} \left(f(x) - S_n(x) \right) \cos x \, dx = 0 \cdot \cdot \cdot \int_0^{2\pi} \left(f(x) - S_n(x) \right) \times \\ &\qquad \times \cos nx \, dx = 0, \\ &\int_0^{2\pi} \left(f(x) - S_n(x) \right) \sin x \, dx = 0 \cdot \cdot \cdot \int_0^{2\pi} \left(f(x) - S_n(x) \right) \times \\ &\qquad \times \sin nx \, dx = 0. \end{aligned}\right\} (2')$$

Но интегралы от произведений $S(x)$ на косинус или синус можно значительно упростить. Действительно, при $\nu = 0, 1, \ldots, n$ находим:

$$\int_0^{2\pi} S_n(x) \cos \nu x \cdot dx = \frac{a_0}{2} \int_0^{2\pi} \cos \nu x \cdot dx +$$
$$+ a_1 \int_0^{2\pi} \cos x \cdot \cos \nu x \cdot dx + \ldots + a_n \int_0^{2\pi} \cos nx \cdot \cos \nu x \cdot dx +$$
$$+ b_1 \int_0^{2\pi} \sin x \cdot \cos \nu x \cdot dx + \ldots + b_n \int_0^{2\pi} \sin nx \cdot \cos \nu x \cdot dx.$$

Согласно известным свойствам интегралов гониометрических функций все члены справа равны нулю, кроме члена с индексом ν, содержащего косинус, который имеет, как известно, простое значение $a_\nu \pi$; таким образом:

$$\int_0^{2\pi} S_n(x) \cdot \cos \nu x \cdot dx = a_\nu \cdot \pi \quad (\nu = 0, 1, \ldots, n).$$

Эта формула справедлива и при $\nu = 0$ благодаря тому, что мы присоединили множитель $\frac{1}{2}$ к коэфициенту a_0. Таким же образом находим далее, что

$$\int_0^{2\pi} S_n(x) \cdot \sin \nu x \cdot dx = b_\nu \cdot \pi \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Эти простые соотношения показывают, что каждое из уравнений (2′) содержит только одно из $2n+1$ неизвестных; поэтому мы можем сразу написать значения этих неизвестных:

$$\left.\begin{aligned} a_\nu &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos \nu x \, dx \quad (\nu = 0, 1, \ldots, n), \\ b_\nu &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin \nu x \, dx \quad (\nu = 1, \ldots, n). \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Во всем дальнейшем мы будем считать, что коэфициенты $S_n(x)$ имеют эти именно значения; тогда I действительно получит свое наименьшее значение, именно равное

$$\int_0^{2\pi} f(x)^2 dx - \pi \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu^2 - \pi \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu^2.$$

Весьма важно отметить то обстоятельство, что полученные таким образом значения коэфициентов совершенно не зависят от общего числа членов ряда n; даже более того, коэфициент, принадлежащий члену $\cos \nu x$ или $\sin \nu x$, сохраняет одно и то же значение независимо от того, применяют ли для приближенного вычисления функции $f(x)$ по тому же самому принципу один только этот член или же в соединении с любыми другими членами. Если бы, например, мы захотели возможно ближе подойти к значениям функции $f(x)$ с помощью одного только члена с косинусом: $a_\nu \cos \nu x$, так что должно было бы

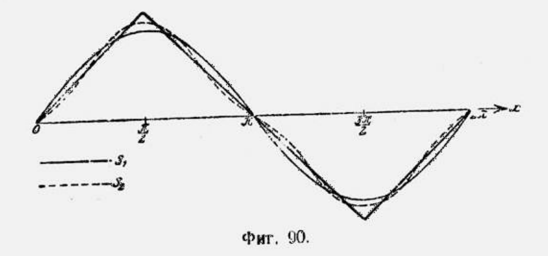
$$\int_0^{2\pi} \left(f(x) - a_\nu \cos \nu x\right)^2 dx = \min,$$

то и в таком случае мы получили бы для a_ν как раз написанное выше значение. Благодаря этому указанный метод приближения оказывается особенно удобным на практике. Если бы мы пожелали, например, приближенно изобразить функцию, ход изменения которой похож на ход изменений синуса, с помощью одного только кратного $\sin x$ и затем увидели бы, что это приближение недостаточно точно, то мы могли бы присоединить еще сколько угодно членов в виде слагаемых, — и все на основании того же принципа наименьшей суммы квадратов ошибок,—не изменяя величины уже найденного первого члена.

Теперь мне предстоит показать вам, насколько суммы $S(x)$, определенные указанным образом, приближаются в отдельных случаях к данной функции $f(x)$. Но мне представляется весьма целесообразным предпослать такому исследованию естественно-научный экспериментальный метод, а именно построить для нескольких конкретных случаев правильное графическое изображение приближенных кривых $S_n(x)$. Это дает живое представление о сути дела и вызывает даже у людей, не имеющих специальной склонности к математике, интерес и потребность в математическом образовании.

Я покажу вам в оригинале и на экране некоторые из таких чертежей, изготовленных Шиммаком, моим бывшим ассистентом, для лекций, читанных мною в зимнем семестре 1903/1904 г., в которых я подробно говорил об этих вещах.

1. Наиболее простые функции, для которых вообще имеют смысл наши интегралы, служащие для определения коэфициентов, мы получим, составляя кривые из прямолинейных отрезков. Пусть, например, кривая $x = f(x)$ идет от 0 до $\frac{\pi}{2}$ по прямой под углом в 45° кверху, затем под таким же углом спускается вниз до абсциссы $x = \frac{3\pi}{2}$ и, наконец, снова под углом в 45° поднимается вверх до точки $x = 2\pi$; далее функция повторяет этот период $(0, 2\pi)$ (фиг. 90). Если станем вычислять соответствующие коэфициенты, то увидим, что все $a_r = 0$,



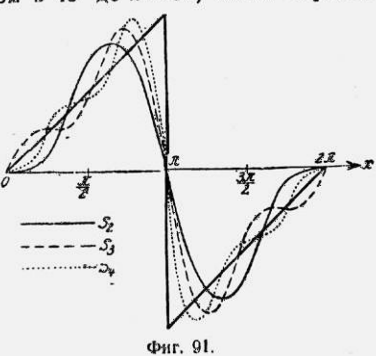
Фиг. 90.

так как $f(x)$ представляет нечетную функцию и вследствие этого остаются только члены с синусами; получается такой ряд:

$$S(x) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1^2} - \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 5x}{5^2} - \ . \ . \ . \right).$$

На фиг. 90 представлен ход кривых, изображающих сумму одного и двух первых членов. Они примыкают все ближе и ближе к данной кривой $y = f(x)$, причем число точек пересечения их с этой кривой постоянно возрастает. Особенно замечательно то, как эти приближенные кривые все больше и больше в игаются в углы, образуемые кривой $f(x)$ в точках с абсциссами $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, ..., хотя сами они как аналитические функции не могут образовывать углов.

2. Пусть линия $f(x)$ от 0 до $x = \pi$ поднимается вверх под углом в 45° по прямой линии, затем делает внезапный скачок вниз до значения $-\pi$ и потом снова поднимается вверх под углом в 45° до $x = 3\pi$; таким образом кривая состоит из ряда параллельных прямолинейных отрезков, проходящих через точки $x = 0$, 2π, 4π, . . . оси x (фиг. 91). Вставляя в местах разрыва по вертикальному отрезку, соединяющему оба конца наклонных отрезков, мы изобразим нашу разрывную функцию посредством непрерывной линии, напоминающей те штрихи, которые все вы делали в начале обучения письму. Это опять нечетная функция, так что все члены с косинусами выпадают, и разложение в ряд имеет такой вид:



Фиг. 91.

$$S(x) = 2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \ . \ . \ . \right).$$

На фиг. 91 изображены суммы первых двух, трех, четырех членов; и в данном случае особенно замечательно то, что они как бы стремятся подражать разрывам функции $f(x)$, проходя, например, через нулевое значение при $x = \pi$ все более крутым падением.

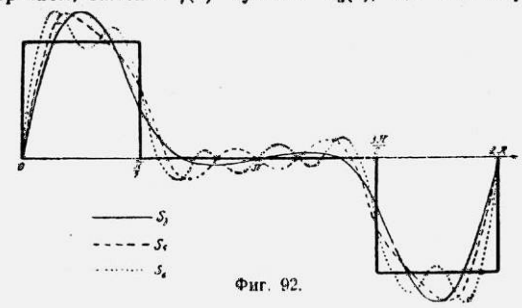
3. В качестве последнего примера возьмем кривую, которая для $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ равна $\frac{\pi}{2}$, для $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}$ равна нулю и для $\frac{3\pi}{2} \leqslant x \leqslant 2\pi$ равна $-\frac{\pi}{2}$, а дальше периодически принимает такие же значения. Вставляя, как и раньше, вертикальные отрезки в местах разрыва, мы получим крючкообразную линию. И в данном случае

только члены с синусами отличны от нуля, ибо функция нечетная, а именно:

$$S(x) = \sin x + 2\frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + 0 + \frac{\sin 5x}{5} + $$
$$+ 2\frac{\sin 6x}{6} + \frac{\sin 7x}{7} + 0 + \frac{\sin 9x}{9} + \ldots$$

Здесь закон коэфициентов не столь простой, как в предыдущих случаях, и соответственно этому переход от одной приближенной кривой к другой (на фиг. 92 изображены кривые для сумм из 3, 5 и 6 членов) не так ясен, как в прежних примерах.

Перейдем теперь к вопросу о том, как велика вообще та ошибка при определенном значении x, которую мы совершаем, заменяя $f(x)$ суммой $S_n(x)$; до сих пор мы



Фиг. 92.

интересовались только интегралом этой ошибки, взятым по всему интервалу. Теперь, для отличия от абсциссы x, которую мы считаем постоянной, будем обозначать переменную интегрирования в интегралах, входящих в выражения коэфициентов a_ν, b_ν (3), через ξ. Тогда наша конечная сумма (1) примет такой вид:

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\xi \cdot f(\xi) \cdot \Big\{\frac{1}{2} + \cos x\cos\xi + \cos 2x\cos 2\xi + \ldots$$
$$\ldots + \cos nx\cos n\xi + \sin x\sin\xi + \sin 2x\sin 2\xi + \ldots + \sin nx\sin n\xi\Big\}.$$

или же, соединяя каждые два слагаемые, стоящие одно под другим, в один член:

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\xi \cdot f(\xi) \cdot \Big\{\frac{1}{2} + \cos(x-\xi) + \cos 2(x-\xi) + \ldots$$
$$\ldots + \cos n(x-\xi)\Big\}.$$

Ряд, стоящий в скобках, нетрудно суммировать; удобнее всего, пожалуй, сделать это, переходя к комплексной показательной функции.

В результате,— в детали я не могу здесь входить,— получается следующее выражение, если воспользоваться тем обстоятельством, что в силу периодичности подинтегральной функции за пределы интегрирования можно принять $-\pi$ и $+\pi$:

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d\xi \cdot f(\xi) \cdot \frac{\sin\frac{2n+1}{2}(\xi - x)}{\sin\frac{1}{2}(\xi - x)}.$$

Чтобы получить представление о величине этого интеграла, построим сперва кривые:

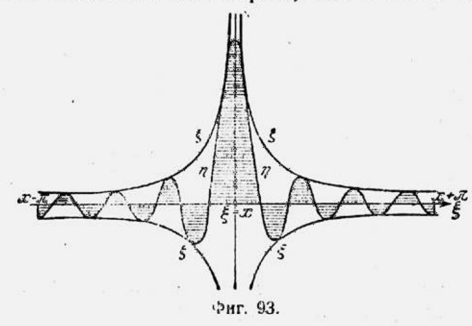
$$\xi = \pm\frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sin\frac{1}{2}(\xi - x)}$$

для промежутка $x - \pi \leqslant \xi \leqslant x + \pi$ оси ξ; они, очевидно, похожи на ветви гиперболы. Между этими ветвями совершает колебания кривая

$$\eta = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(\xi - x)}{\sin\frac{1}{2}(\xi - x)} = \xi\cdot\sin\frac{2n+1}{2}(\xi - x).$$

и именно тем чаще, чем больше n. Для $\xi = x$ она при-

нимает значение, растущее одновременно с n, равное $\eta = \frac{2n+1}{2\pi}$. Если положить для простоты $f(\xi) = 1$, то $S_n(x) = \int_{-\pi}^{+\pi} \eta \cdot d\xi$ представит площадь, ограниченную кривой η и осью ξ (на фиг. 93 заштрихованная часть). Но обладая хотя бы в некоторой степени чувством непрерывности, легко убедиться в том, что при достаточно большом значении n как справа, так и слева площади,



Фиг. 93.

соответствующие отдельным колебаниям, которые попеременно положительны и отрицательны, должны друг друга компенсировать, так что остается только площадь очень высокого и узкого среднего куска; последний же, как нетрудно видеть, при возрастании n переходит как раз в значение $f(x) = 1$. Совершенно так же в общем обстоит дело, когда $f(x)$ представляет любую не слишком разрывную функцию, но непременно непрерывную при $x = \xi$.

Такие же точно соображения, выраженные в более строгой форме, лежат в основании доказательства Дирихле (Dirichlet) сходимости бесконечных тригонометрических рядов. Это доказательство Дирихле впервые опубликовал в IV томе журнала Крелля (Crelles Journal)

в 1829 г. [1]) Позднее он дал (1837) популярное изложение в „Repertorium der Physik von Dove und Moser". В настоящее время это доказательство приводится в большинстве учебников, так что мне не приходится здесь на нем останавливаться. Я должен лишь назвать те условия, которым должна удовлетворять функция $f(x)$, чтобы ее можно было представить в виде бесконечного тригонометрического ряда. Предположим снова, что функция $f(x)$ дана в промежутке $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ и затем продолжается периодически. Дирихле делает следующие допущения, называемые теперь просто **условиями Дирихле**:

a) **функция $f(x)$ непрерывна целыми отрезками**, т. е. в промежутке $(0, 2\pi)$ функция делает только конечное число скачков;

b) **функция $f(x)$ монотонна целыми отрезками**, т. е. весь промежуток $(0, 2\pi)$ можно разбить на конечное число таких более мелких интервалов, что в каждом из них $f(x)$ либо не возрастает, либо не убывает — другими словами, $f(x)$ обладает лишь конечным числом максимумов и минимумов. Поэтому приходится исключить такие, например, функции, как $\sin\frac{1}{x}$, для которой в окрестности точки $x = 0$ скопляется бесконечное число экстремумов.

При соблюдении этих условий, как показывает Дирихле, бесконечный ряд точно представляет значение функции $f(x)$ во всех точках x, в которых последняя непрерывна:

$$\lim_{n=\infty} S_n(x) = f(x).$$

Но далее Дирихле показывает, что и **в точках разрыва ряд этот сходится, а именно, сумма его при этих значениях x равна арифметическому среднему тех значений, которые принимает $f(x)$, если приближаться справа и слева к точке разрыва**; или, как принято писать:

$$\lim_{n=\infty} S_n(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

---

[1]) „Ueber die Darstellung ganz willkührlicher Funktionen durch Sinus und Cosinusreihen". Перепечатано в собрании сочинений: Werke, Bd. I, pag. 133—160 и в издании Ostwalds Klassiker, № 116 (Leipzig 1900).

На фиг. 94 отмечены такие точки разрыва и те значения, о которых идет речь.

Упомянутые условия Дирихле, налагаемые на функцию $f(x)$, только достаточны, но ни в коем случае не являются необходимыми для того, чтобы $f(x)$ была представлена рядом $S(x)$. Но, с другой стороны, не достаточно предполагать только непрерывность $f(x)$; можно построить непрерывные функции, у которых бесчисленное множество колебаний столь сильно сгущено, что ряд $S(x)$ расходится.

Фиг. 94.

После этих — скорее теоретических — замечаний я хочу сказать несколько слов о практической стороне тригонометрических рядов. Более подробный разбор относящихся сюда вопросов вы найдете в указанной уже выше книге Рунге. В ней вы найдете обстоятельное исследование вопроса о вычислении коэфициентов ряда в числах, т. е. вопрос о том, как можно наиболее быстро вычислить для данной функции интегралы, входящие в выражения для a_ν и b_ν.

Построены также специальные механические аппараты для вычисления этих коэфициентов, так называемые гармонические анализаторы. Это название объясняется тем значением, какое, как известно, имеет разложение данной функции $y = f(x)$ в тригонометрический ряд в акустике; оно в точности соответствует разложению любого тона $y = f(x)$ (где x означает время, а y — амплитуду колебаний, соответствующую данному тону) на „чистые тона", т. е. на чистые косинусоидальные и синусоидальные колебания. В нашем собрании моделей и приборов имеется анализатор, построенный Коради (Coradi) в Цюрихе; он позволяет определить коэфициенты первых 6 членов с синусами и 6 членов с косинусами ($\nu = 1, \ldots, 6$), так что в общем дает 12 коэфициентов. Коэфициент $\frac{a_0}{2}$ приходится вычислять отдельно посредством планиметра. Майкельсон (Michelson) в Чикаго и Стреттон (Stratton)

построили аппарат, позволяющий вычислить даже 160 коэфициентов ($\nu = 1, 2, \ldots, 80$); вы найдете его описание в книге Рунге. Этот аппарат позволяет и, обратно, суммировать данный тригонометрический ряд из 160 членов, — другими словами, по данным коэфициентам восстановить самую функцию $f(x)$; конечно, эта задача тоже имеет громадное практическое значение.

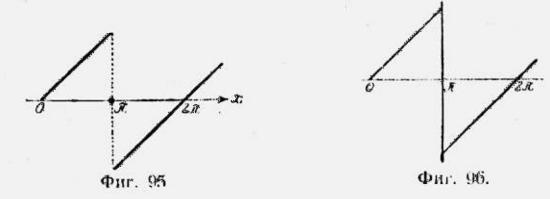
Аппарат Майкельсона-Стреттона впервые обратил внимание на одно интересное явление, собственно говоря, совершенно элементарного характера [1]); приходится удивляться тому, что до тех пор оно оставалось незамеченным. Впервые заговорил о нем Гиббс (Gibbs) в 1899 г. на страницах журнала „Nature" [2]), и поэтому его и называют явлением Гиббса. Позвольте мне сказать о нем несколько слов. По теореме Дирихле значение бесконечного тригонометрического ряда при определенном значении x равно $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$; так, во втором из наших примеров, — чтобы иметь в виду конкретный случай, — сумма ряда, в этом смысле слова, представляет функцию, изображенную на фиг. 95 с изолированными точками для $x = \pi, 3\pi, \ldots$

Но раньше мы смотрели на тригонометрическое приближение иначе, чем Дирихле, который оставляет величину x постоянной и заставляет n расти до бесконечности. Мы, напротив, оставляли значение n постоянным и рассматривали $S_n(x)$ при переменном x и таким образом строили последовательные приближенные кривые $S_1(x)$, $S_2(x)$, $S_3(x), \ldots$ Вопрос заключается в следующем: что станет с этими кривыми, если n будет возрастать до бесконечности? Или, выражаясь арифметически: вокруг каких значений сгущаются значения $S_n(x)$, когда n при переменном x стремится к бесконечности? Ясно, что теперь предельная функция не содержит более изолированных точек, как прежде, т. е. у Дирихле; напротив, мы должны

[1]) Как видно из статьи „Тригонометрические ряды и интегралы", помещенной в геттингенской энциклопедии (Enzyklopädie, II, 127, стр. 1049), Г. Вильбрагам (H. Wilbraham) уже знал и количественно подсчитал описываемое ниже явление.

[2]) Bd. 59 (1898), pag. 200 или в Scientific papers, II (New York, 1906), pag. 258

получить сплошную линию. На первый взгляд представляется вероятным, что эта кривая будет состоять как раз из непрерывных ветвей кривой $y=f(x)$ и из вертикальных отрезков, соединяющих значения $f(x+0)$ и $f(x-0)$ в местах разрыва; в упомянутом примере это была бы линия, напоминающая немецкую букву „𝔪" (фиг. 91). На самом же деле оказывается, что вертикальный отрезок предельной кривой всегда несколько выходит кверху и книзу за пределы значений $f(x+0)$ и $f(x-0)$ на конечную длину, так что эта кривая имеет



Фиг. 95 Фиг. 96.

замечательный вид, представленный на фиг. 96. Эти добавочные хвостики впервые были замечены у кривых, построенных аппаратом Майкельсона, так что они обнаружены именно экспериментальным путем. Вначале их, конечно, приписывали несовершенству аппарата, пока Гиббс не выяснил необходимость их появления. Если через D обозначить величину скачка $(|f(x+0)-f(x-0)|)$, то, как показал Гиббс, удлинение должно равняться:

$$-\frac{D}{10}\int_{\pi}^{\infty}\frac{\sin\xi}{\xi}\,d\xi=\frac{1}{\pi}\,0{,}28D=0{,}09D.$$

Что касается обоснования такого утверждения, то достаточно дать его для одной какой-нибудь разрывной функции, например для функции, которой мы воспользовались в качестве примера, — так как все другие функции с таким же скачком должны получиться из нее посредством прибавления соответственных непрерывных функций. А для этого случая доказательство не особенно трудно, а именно оно получается из рассмотрения интегральной формулы для $S_n(x)$ (стр. 295). С другой стороны, можно вполне отчетливо проследить по наброску приближенных кривых (фиг. 91), каким образом возникает острие Гиббса.

Я зашел бы слишком далеко, если бы стал входить здесь в дальнейшие, крайне интересные подробности хода приближенных кривых; но я охотно рекомендую вашему вниманию содержательную и легко написанную работу Fejèr в „Math. Ann.", Bd. 64 (1907, pag. 273).

На этом я закончу специальные замечания относительно тригонометрических рядов, чтобы присоединить к ним отступление, посвященное общему понятию функции, которое и по существу дела и исторически очень тесно сюда примыкает.

D. Общее понятие о функции.

Мы должны заняться в нашем курсе этим вопросом, тем более, что ведь наша школьная реформа по самому существу своему стоит под девизом выделения на первый план в школьном обучении этого столь важного понятия.

Сперва мы снова проследим историю развития этого понятия. Прежде всего заметим, что у более старых авторов, каковы Лейбниц и Бернулли, понятие о функции встречается всегда лишь в применении к отдельным примерам, к степеням, к тригонометрическим функциям и т. п. Общие формулировки встречаются впервые только в XVIII в.

1. У Эйлера около 1750 г. мы находим два различных определения слова „функция":

a) В своем „Introductio" он называет функцией *всякое аналитическое выражение*, содержащее x, т. е. всякое выражение, составленное из степеней, логарифмов, тригонометрических функций и т. д.: точнее, Эйлер не определяет выражений, которые он при этом употребляет. Впрочем, он уже делает обычное подразделение функций на алгебраические и на трансцендентные.

b) Наряду с этим мы встречаем у него, что функция $y(x)$ *определяется тем, что в плоскости координат xy начерчена кривая просто от руки* „libera manu ducta" (фиг. 97).

2. Лагранж в своей „Théorie des fonctions analytiques" (около 1800 г.) сильно ограничивает понятие о функции, сводя его к так называемым **аналитическим функциям**, определяемым посредством степенного ряда относительно x. Мы сохранили этот термин „аналитическая функция", хотя, конечно, хорошо знаем, что здесь идет речь только об одном специальном классе функций из числа тех, которые действительно появляются в анализе. Степенным рядом

$$y = \mathfrak{P}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

функции определяются только внутри области сходимости, т. е. в некоторой окрестности значения $x = 0$. Но вскоре был найден способ расширения области, в которой функция определена, за пределы первоначального круга

Фиг. 97.

Фиг. 98.

сходимости: если, например, значение x_1 лежит внутри (фиг. 98) области сходимости ряда $\mathfrak{P}$ и если преобразовать этот ряд в другой степенной ряд, расположенный по степеням $(x - x_1)$:

$$y = \mathfrak{P}_1(x - x_1),$$

то может случиться, что область сходимости последнего ряда выйдет за пределы области сходимости первого ряда, так что y окажется определенным в более обширной области; повторяя тот же прием, можно иногда эту область расширить еще дальше. Этот процесс **аналитического продолжения** хорошо известен всякому, кто хоть немного занимался теорией комплексных функций.

Обратите внимание в особенности на то обстоятельство, что все коэфициенты степенного ряда $\mathfrak{P}(x)$, и следовательно, и самая функция y, будут вполне определены, если будут известны значения функции y вдоль какого-

нибудь отрезка оси x, сколь угодно малой длины, например, в окрестности точки $x = 0$; действительно, тогда будут известны значения всех производных функций y для $x = 0$, и коэфициенты можно определить с помощью формул:

$$y(0) = a_0;\ y'(0) = a_1;\ y''(0) = 2a_2 \dots$$

Таким образом самый маленький отрезок функции, аналитической в смысле определения Лагранжа, вполне ее определяет на всем ее протяжении. Это свойство стоит в полном противоречии со свойствами функции в смысле второго определения Эйлера: всякий отрезок такой функции можно продолжить произвольным образом.

Фиг. 99.

3. Имея в виду дальнейшее развитие понятия о функции, я должен назвать теперь Фурье (Fourier) — одного из многочисленных выдающихся математиков, живших в Париже в начале XIX в. Его главный труд — „Аналитическая теория теплоты"[1] — появился в 1822 г.; первое сообщение о содержащихся в нем теориях Фурье сделал Парижской Академии уже в 1807 г. Это произведение является источником всех тех методов современной математической физики, которые можно охарактеризовать как сведение всех проблем к интегрированию диференциальных уравнений с частными производными при заданных значениях на границах („Randwertaufgaben"). Сам Фурье занимается специально вопросом о теплопроводности, который в простейшем случае состоит в следующем: край плоской круглой пластинки поддерживается при определенной температуре, например одна часть края при температуре таяния льда, другая — при температуре кипения воды (фиг. 99), спрашивается, какое установится стационарное распределение температур вследствие распространения теплоты в пластинке? Таким образом здесь играют роль значения на границах, которые можно по краю пластинки в отдельных частях задавать совершенно произвольно, в одной части совершенно не-

---

[1] „Théorie analytique de la chaleur", перепечатано в собрании сочинений: Fourier, Oeuvres, T. I (Paris 1888).

зависимо от другой; поэтому здесь на первый план выступает само собой второе определение функции Эйлера, а не определение Лагранжа.

4. Это же самое эйлерово определение принимает, в сущности, и Дирихле в упомянутых выше работах, но только он его переводит на язык анализа или — как говорят теперь — арифметизирует его. И это действительно представляется необходимым, ибо никак я кривая, как бы тонко она ни была вычерчена, никогда не даст точного определения сопряжения значений y и x по той причине, что толщина черты не позволяет произвести арифметически точного измерения нужных значений.

Дирихле формулирует арифметическое содержание эйлерова определения следующим образом: „Если в некотором промежутке каждому отдельному значению x отнесено одно определенное значение y, то переменная y называется функцией от x". Владея, таким образом, этим наиболее общим понятием функции, Дирихле все же всякий раз имеет в виду, следуя всеми принятому обычаю, прежде всего непрерывные или не слишком разрывные функции. Если в ту пору и считали вполне возможными сложные сгущения точек разрыва, то едва ли предполагали, что такие случаи могут представить интерес для изучения. Эта точка зрения находит свое отражение и в том обстоятельстве, что Дирихле всегда говорит о разложении в ряд „вполне произвольных функций" совершенно так же, как Фурье говорил о „fonctions entièrement arbitraires"; а между тем он очень точно формулирует свои „условия Дирихле", которым эти функции должны удовлетворять.

5. Теперь мы должны принять во внимание, что в то время (около 1830 г.) начинается более общая разработка теории функций комплексного переменного, которая становится постепенно, приблизительно в течение ближайших трех десятилетий, общим достоянием математиков. Это развитие связано, прежде всего, с именами Коши, Римана и Вейерштрасса; первые два математика исходят, как известно, от диференциальных уравнений в частных производных, названных по их имени (этим уравнениям удовлетворяют вещественная и мнимая части

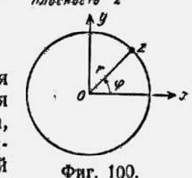
u, v комплексной функции $f(x+iy)=u+iv$), между тем как Вейерштрасс определяет функцию степенным рядом и совокупностью его аналитических продолжений, примыкая этим в известной степени к Лагранжу.

И вот оказывается, что этот переход в область комплексных величин привел к сопоставлению и объединению обеих рассмотренных выше точек зрения на функцию; я остановлюсь на этом несколько подробнее.

Положим $z=x+iy$ и станем рассматривать степенной ряд:

$$f(z)=u+iv=c_0+c_1z+c_2z^2+\ldots;$$

предположим, что этот ряд сходится при небольших значениях z, определяя собой, по терминологии Вейерштрасса, элемент аналитической функции. Рассмотрим его значения на небольшой окружности радиуса r с центром в $z=0$ (фиг. 100), лежащей целиком внутри области сходимости; другими словами, подставим вместо z в степенной ряд величину $x+iy=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$:



Фиг. 100.

$$f(z)=c_0+c_1r(\cos\varphi+i\sin\varphi)+c_2r^2(\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi)+\ldots$$

Если разложим коэфициенты на их вещественные и мнимые части:

$$c_0=\frac{\alpha_0-i\beta_0}{2},\quad c_1=\alpha_1-i\beta_1,\quad c_2=\alpha_2-i\beta_2,\ldots,$$

то для вещественной части f найдем такое выражение

$$u(\varphi)=\frac{\alpha_0}{2}+\alpha_1r\cos\varphi+\alpha_2r^2\cos 2\varphi+\ldots$$
$$\ldots+\beta_1r\sin\varphi+\beta_2r^2\sin 2\varphi+\ldots$$

Мы преднамеренно взяли чисто мнимые части коэфициентов c со знаками минус с тем, чтобы в последнем выражении все знаки были плюс. Таким образом степенной ряд для $f(z)$ дает выражение вещественной части u на нашей окружности в функции от угла φ, посредством тригонометрического ряда точно такого же рода, какой мы рассматривали выше, с коэфициентами α_0, $r^\nu\alpha_\nu$, $r^\nu\beta_\nu$. Обратно, этот тригонометрический ряд вполне опре-

делает собой все величины $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \beta_1, \beta_2, \ldots$, а следовательно, и степенной ряд, не считая постоянного слагаемого $-\frac{i\beta_0}{2}$. Если задано какое-либо распределение значений $u(\varphi)$ по окружности, лишь бы его удалось представить в виде тригонометрического ряда, — если, другими словами, задана функция в смысле Дирихле, удовлетворяющая условиям Дирихле, то ей можно указанным образом отнести определенный степенной ряд, сходящийся внутри взятой окружности (r), т. е. определенную аналитическую функцию, вещественная часть которой принимает на этой окружности заданные значения $u(\varphi)$. Мы видим, что в этом порядке идей понятие функции, в смысле Фурье-Дирихле, вполне совпадает с определением Лагранжа; только та произвольность, которая имеет место по отношению к ходу изменения тригонометрического ряда $u(\varphi)$ вдоль всей окружности, степенным рядом вполне концентрируется в ближайшей окрестности центра окружности.

6. Но современная наука не остановилась, конечно, на образовании этих понятий, ибо наука, как таковая, никогда не знает отдыха, и только тот или другой исследователь может притти в изнеможение. А именно, в противоположность тому, что я охарактеризовал выше как точку зрения Дирихле, в последние три десятилетия при изучении вещественных функций стали интересоваться возможно более различными функциями, которые существенно выходят за пределы условий Дирихле. При этом были найдены весьма замечательные типы функций, содержащие „отвратительные скопления“ самых неприятных особенностей. Здесь, прежде всего, возникает вопрос о том, чтобы исследовать, в какой мере остаются в силе при наличности таких „уродств“ те теоремы, которые имеют место для „приличных“ функций.

7. Наконец, сюда же примыкает совершенно новое обобщение понятия о функции, идущее еще дальше. До сих пор функцию всегда считали определенной в каждой точке континуума всех вещественных или всех мнимых значений x или же, по крайней мере, во всех точках некоторого интервала или области. Но с тех пор, как все более и более стало выступать на первый план созданное Г. Кантором понятие о множестве, согласно которому континуум всех x представляет лишь пример „множества“ объектов, — с этих пор стали рассматривать и такие функции, которые определены только для значений x какого-либо множества, и стали вообще называть y функцией от x, если всякому элементу одного множества объектов (чисел или точек) x соответствует определенный элемент другого множества y.

Я хочу здесь же отметить одно отличие этих новых представлений от прежних: понятия, выясненные в пп. 1—5, возникли и развились, главным образом, ввиду их приложений к изучению природы; стоит только вспомнить заглавие сочинений Фурье! Наоборот, новейшие исследования, упомянутые в пп. 6 и 7, представляют продукты чисто математической потребности исследования, которая не имеет вовсе в виду нужд естествознания; действительно, до сих пор эти исследования не нашли еще прямого применения. Конечно, оптимист должен полагать, что еще придет, несомненно, время для таких приложений.

Но поставим снова свой обычный вопрос о том, что из всего этого должна воспринять школа, что должен знать о них учитель и что должны знать ученики.

Прежде всего, если школа несколько, скажем, на три десятилетия, отстает от новейших успехов нашей науки, если обнаруживается, так сказать, известный гистерезис, то это вполне естественно и отнюдь не нуждается в оправдании. Но в действительности имеет место гораздо более продолжительный гистерезис, обнимающий более столетия: ведь школа большей частью игнорирует все развитие науки, имевшее место после Эйлера; таким образом для работы реформаторов остается еще весьма обширное поле. То, чего мы требуем от реформы, представляется весьма скромным, если сравнить наши требования с современным состоянием науки: **мы хотим, чтобы общее понятие функции, в смысле того и другого определения Эйлера, проникло как фермент во все преподавание математики в средней школе**; но его надо вводить не в форме абстрактного определения, а на конкретных примерах, какие во множестве имеются уже у Эйлера, чтобы сделать это понятие живым достоянием ученика. Что

же касается преподавателей математики, то, конечно, желательно, чтобы они, помимо того, были знакомы с элементами теории комплексных функций. Хотя и нельзя требовать того же по отношению к новейшим концепциям учения о множествах, но все же желательно, чтобы среди многочисленных учителей нашлось хотя бы небольшое число самостоятельно работающих людей, которые занялись бы и этими вещами.

К сказанному я хотел бы добавить несколько слов о том, какую важную роль сыграло учение о тригонометрических рядах во всей этой эволюции понятий. Подробные литературные указания по этому вопросу вы найдете в работе Буркгардта: „Разложения в ряд по периодическим функциям"— в том „гигантском отчете", как мы его называем в более тесном кругу, который вот уже 7 лет, как выходит отдельными выпусками при X томе „Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung" [1]); в более чем 9000 цитат этот отчет объединяет такое множество литературы, какого не найти нигде.

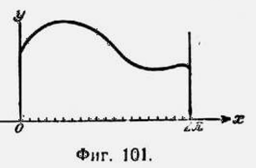
Первым пришел к изображению произвольных функций посредством тригонометрических рядов Даниил Бернулли, сын Ивана Бернулли. Изучая (около 1750 г.) акустическую проблему о колебаниях струны, он заметил, что можно получить самый общий вид колебаний струны посредством наложения синусоидальных колебаний, соответствующих основному тону и чистым обертонам; а из этого вытекает возможность разложить функцию, изображающую форму струны, в тригонометрический ряд.

Хотя в деле ознакомления с этими рядами вскоре были сделаны значительные успехи, однако никто не хотел верить, что с помощью таких рядов можно представить любые функции, заданные графически. Это можно объяснить неясностью представления о такого рода соображениях, какие теперь в учении о множествах стали

[1]) Burkhardt, Entwicklungen nach oszillierenden Funktionen (в особенности во 2-м и 3-м выпуске). Этот отчет завершен в виде 2-го выпуска этого тома „Jahresbericht". Короткое извлечение помещено в гетт. энциклопедии (Enz., Bd. II). Обзор Буркгардта простирается до 1850 г. Дальнейшее развитие этого предмета будет помещено в статье Гильба и Риса (Hilb und Riesz) в имеющем в ближайшее время появиться выпуске II Энциклопедии.

совершенно тривиальными. Повидимому, принимали a priori, не умея, конечно, выразить это точно, — что множество всех произвольных непрерывных функций больше множества всех возможных систем числовых значений $a_0, a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ [1]), которые соответствуют совокупности всех тригонометрических рядов.

Но точные логические построения современной теории множеств пролили свет на эти вопросы и обнаружили ложность указанного предрассудка. Позвольте мне подробнее остановиться на этом важном вопросе. Легко видеть, что непрерывная функция, определенная произвольным образом в некотором промежутке, например $(0, 2\pi)$, будет дана на всем ее протяжении, если будут даны ее значения во всех рациональных точках этого промежутка. Действительно, ввиду того что эти значения во всяком промежутке образуют всюду плотное множество, то ко всякому иррациональному значению x можно подойти сколь угодно близко с помощью (фиг. 101) рациональных значений, и в силу непрерывности функции значение ее $f(x)$ должно равняться пределу значений в этих бесконечно близких рациональных точках. Далее, как известно, множество всех рациональных чисел — „счетное", другими словами, его можно расположить в такой ряд, что в нем за определенным первым элементом следует определенный второй, за ним третий и т. д. [2]). А из этого следует, что задать произвольную непрерывную функцию, значит задать счетное множество констант — значений функции в расположенных таким образом рациональных точках. Точно таким же образом посредством счетного множества постоянных $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$ может



Фиг. 101.

[1]) Каждая комбинация $a_0, a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ определяет тригонометрический ряд, если смотреть на эти числа как на его коэфициенты.

[2]) См. брошюру Дедекинда, Непрерывность и иррациональные числа, Одесса, „Mathesis"; в приложенной к этой брошюре статье Шатуновского эти идеи достаточно выяснены.

быть задан определенный тригонометрический ряд. Таким образом мнение, будто множество всех непрерывных функций по самой своей природе существенно больше множества рядов, оказывается лишенным всякого основания. Ниже мы снова займемся этим вопросом более обстоятельно.

Фурье первый отрешился от такого предвзятого мнения, и в этом заключается его громадное значение в истории тригонометрических рядов. Хотя он и не дал приведенного выше объяснения в духе учения о множествах, но он первый имел мужество уверовать в способность тригонометрических рядов изображать произвольные функции; руководясь этой верой, он, действительно, вычислил несколько характерных примеров разрывных функций (подобных тем, какие мы рассмотрели выше) и тем поставил вне сомнений правильность своего убеждения. Действительные общие доказательства сходимости дал впервые, как я уже говорил, Дирихле, бывший учеником Фурье. Выступление Фурье было настоящей революцией; чтобы посредством рядов из аналитических функций можно было изобразить такие произвольные функции, подчиненные в различных частях рассматриваемого промежутка различным аналитическим законам,— это представлялось тогдашним математикам чем-то совершенно новым и неожиданным. В благодарность за открытие этой истины тригонометрические ряды назвали именем Фурье, которое, действительно, пользуется широким распространением. Конечно, всякое такое приспособление собственных имен к научной терминологии всегда представляет значительную односторонность, если не прямую несправедливость.

В заключение я должен, хотя бы вкратце, упомянуть о второй заслуге Фурье, а именно, он рассматривал также и предельный случай тригонометрических рядов, который наступает, если период изображаемой функции возрастает до бесконечности; а так как функция с бесконечно большим периодом представляет попросту непериодическую функцию, произвольно заданную вдоль всей оси x-ов, то это дает средство изображать и непериодические функции. Чтобы выполнить этот переход, находят сперва посредством линейного преобразования

аргумента ряда изображение функций с любым периодом l вместо определенного периода 2π, а затем заставляют l возрастать до бесконечности. При этом ряд переходит в так называемый интеграл Фурье:

$$f(x) = \int_0^\infty \left(\varphi(\nu) \cos \nu x + \psi(\nu) \sin \nu x \right) d\nu,$$

где $\varphi(\nu)$, $\psi(\nu)$ выражаются определенным образом через интегралы, взятые от $-\infty$ до $+\infty$, от функции $f(x)$. Таким образом различие заключается в том, что теперь индекс ν изменяется непрерывно от 0 до ∞, тогда как раньше он принимал только значения $0, 1, 2, 3, \ldots$, и что вместо коэфициентов a_ν, b_ν стоят функции $\varphi(\nu)\,d\nu$ и $\psi(\nu)\,d\nu$.

На этом мы можем расстаться с элементарными трансцендентными функциями, которыми мы до сих пор занимались в отделе, посвященном анализу, и перейти к рассмотрению исчисления бесконечно малых в собственном смысле слова.

III. ИСЧИСЛЕНИЕ БЕСКОНЕЧНО-МАЛЫХ В СОБСТВЕННОМ СМЫСЛЕ СЛОВА.

Конечно, я предполагаю, что все вы умеете диференцировать и интегрировать и не раз применяли это умение. Эту главу мы посвятим только вопросам общего характера, как, например, вопросы о логическом и психологическом обосновании, вопросы о преподавании и т. д.

1. Общие замечания относительно исчисления бесконечно-малых.

Я хотел бы предпослать замечание общего характера относительно объема математики. Вы можете часто услышать от не-математиков, в особенности от философов, что математика занимается исключительно выводами логических следствий из ясно заданных посылок, причем совершенно безразлично, что именно означают эти посылки, истинны ли они или ложны,— лишь бы только они не противоречили друг другу. Совершенно иначе смотрит на дело всякий, кто сам продуктивно занимается матема-

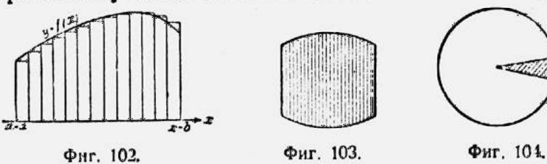
тикой. В действительности те люди судят исключительно по той выкристаллизованной форме, в какой принято излагать готовые математические теории; но исследователь работает в математике, как и во всякой другой науке, совершенно иначе: он существенно пользуется своей фантазией и подвигается вперед индуктивно, опираясь на эвристические вспомогательные средства. Можно привести немало примеров того, как великие математики находили самые важные теоремы, не будучи в состоянии строго их доказать. Неужели можно не ценить такое великое творчество, неужели надо в угоду приведенному выше определению математики сказать, что это не математика и что только те позднейшие математики, которые нашли, наконец, вылощенные доказательства теорем,— только они одни двигали математику? Конечно, в конце концов, присвоить ли слову то или иное значение,— вещь условная, но при оценке заслуг научных работников приходится сказать, что индуктивная работа того, кто впервые установил какое-нибудь предложение, имеет, конечно, такую же ценность, как и дедуктивная работа того, кто его впервые доказал, ибо то и другое одинаково необходимо.

Как раз при изобретении и первоначальной разработке исчисления бесконечно-малых это индуктивное творчество, не основанное на связных логических выводах, сыграло большую роль; при этом весьма часто самым действительным эвристическим средством являлось чувственное восприятие,— я имею в виду непосредственное чувственное восприятие со всеми его неточностями; например восприятие, при котором кривая представляется действительно чертой определенной толщины, а не тем абстрактным воззрением, которое постулирует как нечто заранее выполненное, предельный переход к точной одномерной линии. Я хочу в подтверждение этого изложить в кратких чертах, как исторически вырабатывались идеи исчисления бесконечно-малых.

Обращаясь прежде всего к понятию интеграла, приходится заметить, что оно исторически возникло по поводу проблемы измерения площадей и объемов (квадратура и кубатура). Как известно, абстрактное логическое определение интеграла $\int_b^a f(x)dx$, т. е. площади фигуры, ограничен-

ной кривой $y=f(x)$, осью x-ов и ординатами $x=a$ и $x=b$, заключается в том, что это есть предел суммы всех узких прямоугольников, вписанных в эту фигуру, когда число их беспредельно возрастает, а ширина одновременно неограниченно убывает (фиг. 102). Но с точки зрения чувственного восприятия представляется естественным определить рассматриваемую площадь не как точный предел, а просто как сумму очень большого числа довольно узких прямоугольников, ибо и без того дальнейшему уменьшению прямоугольников всегда положит конец неизбежная неточность чертежа.

С такими наивными представлениями мы, действительно, встречаемся у самых выдающихся математиков в период



Фиг. 102. Фиг. 103. Фиг. 104.

возникновения исчисления бесконечно-малых. Прежде всего я назову Кеплера, который занимается вопросом об измерении объемов в своей „Новой стереометрии винных бочек“ [1]. Главный интерес для Кеплера представляет измерение бочек и их наиболее целесообразная форма. При этом он становится целиком на только что отмеченную наивную точку зрения: он представляет себе бочку состоящей из большого числа тонких листов, например из бумаги, и считает объем бочки равным сумме объемов этих листов (фиг. 103), каждый из которых представляет цилиндр. Подобным же образом поступает он и при вычислении объемов простых геометрических тел, например шара. Последний Кеплер рассматривает как образованный из очень большого числа (фиг. 104) небольших пирамидок с вершиной в центре шара; и поэтому весь объем равен по известной формуле для пирамид произведению $\frac{r}{3}$ на сумму всех оснований пирамидок. Полагая последнюю

[1]) Nova stereometria doliorum vinariorum“, Lincii 1615.

сумму равной поверхности шара $4\pi r^2$, Кеплер получает для объема правильную формулу $\frac{4\pi r^3}{3}$. Впрочем, Кеплер подчеркивает практическое, эвристическое значение таких рассуждений, а относительно строгих математических доказательств отсылает к сложным рассуждениям Архимеда (метод исчерпания).

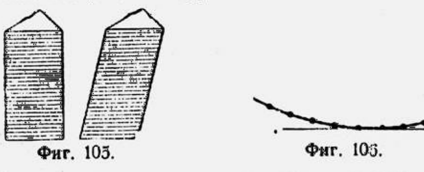
Подобные же рассуждения встречаются в книге иезуита Бонавентуры Кавальери „Geometria indivisibilibus continuorum"[1] („геометрия неделимых"), в которой он устанавливает принцип, носящий теперь его имя: объемы двух тел равны, если равны площади сечений, проведенных на одинаковой высоте в обоих телах. Об этом принципе Кавальери очень много, как известно, говорят у нас в школе, думая с его помощью избегнуть интегрального исчисления, тогда как в действительности этот метод вполне принадлежит интегральному исчислению. Обоснование, которое дает Кавальери, сводится к тому, что он представляет себе оба тела построенными из тонких листков, наложенных друг на друга и по предположению попарно конгруэнтных между собой; другими словами, одно тело может быть получено из другого посредством сдвигания отдельных листков (фиг. 105), при этом, конечно, объем тела не может измениться, так как он состоит из одних и тех же слагаемых и до и после этого процесса.

Подобным же образом наивное воззрение приводит к понятию о производной функции, т. е. к понятию о касательной к кривой. Для этого заменяем — и так действительно и поступали — кривую прямолинейным многоугольником, вершинами которого служит достаточно большое число точек, густо расположенных на кривой. В силу природы нашего чувственного восприятия на большом расстоянии едва ли возможно отличить кривую от такой вереницы точек и тем более от самого многоугольника. Но в таком случае касательную к кривой приходится определить просто как прямую, соединяющую две такие точки, непосредственно следующие одна за другой (фиг. 106), т. е. как продолжение одной из сторон многоугольника.

[1]) Bologna, 1653, первое издание 1653 г. Подробнее см. на стр. 321.

С абстрактно логической точки зрения такая прямая, конечно, всегда, — как бы близко ни лежали соседние точки, — остается только секущей по отношению к кривой, а касательная является тем предельным положением, к которому эта секущая неограниченно приближается при уменьшении расстояния между точками. Аналогично этому, под кругом кривизны с этой наивной точки зрения надо понимать круг, проходящий через три последовательные вершины многоугольника, между тем как, выражаясь точно, надо сказать, что круг кривизны есть предельное положение такого круга при неограниченном сближении трех точек.

Убедительность такого рода наивных рассуждений представляется, конечно, различным лицам весьма различ-



Фиг. 105. Фиг. 106.

ной. Многие — и к ним принадлежу и я сам — чувствуют себя в высшей степени ими удовлетворенными. Другие же, будучи односторонне расположены к чисто логической стороне, находят, что такие соображения ничего не говорят, и не могут согласиться с тем, чтобы на них можно было вообще смотреть как на основание для математических рассуждений.

С другой стороны, такие наивные приемы мышления и в настоящее время очень часто применяются всякий раз, когда хотят — в математической физике, в механике, в диференциальной геометрии — применить какое-нибудь математическое положение, так как там эти приемы, как все вы знаете, весьма целесообразны. Конечно, чистые математики часто смеются над таким наивным изложением; во время моего студенчества говорили, что для физика диференциал — это кусок латуни, с которым он обращается как со своими аппаратами.

По этому поводу я хочу отметить достоинства обозначений Лейбница, которые теперь господствуют повсюду.

Действительно, они соединяют с целесообразным указанием на наивное воззрение также известный намек на тот абстрактный предельный процесс, который действительно в этих понятиях содержится. Так, символ Лейбница $\frac{dy}{dx}$ для обозначения производной указывает на то, что последняя возникает из частного, но при этом знак d, в противоположность знаку конечной разности Δ, показывает, что тут приходит и нечто новое, а именно предельный переход. Точно так же символ для обозначения интеграла $\int y\,dx$ указывает, что последний возникает из суммы малых величин, но при этом обычный знак суммы Σ заменяется стилизированным S (приходится удивляться тому, что не все знают, что знак $\int$ имеет такое значение), и это указывает на то, что здесь к суммированию присоединяется новый процесс.

Теперь мы должны, наконец, ближе подойти к вопросу о логическом обосновании дифференциального и интегрального исчисления; мы непосредственно приступим к рассмотрению этого вопроса в его историческом развитии.

1. Основная идея заключается — как теперь излагают во всех высших школах, так что мне приходится только в двух словах вам это напомнить,—в том, что *исчисление бесконечно-малых представляет попросту приложение общего понятия о пределе*: производную определяют как предел частного соответственных конечных приращений переменной и функции:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x=0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

предполагая, что этот предел существует; это ни в коем случае не есть частное, в котором dy и dx имеют самостоятельное значение. Точно так же интеграл определяют как предел суммы:

$$\int_a^b y\,dx = \lim_{\Delta x_i=0} \sum_{(i)} y_i \cdot \Delta x_i,$$

где Δx_i обозначает конечные доли промежутка $a \leqslant x_i \leqslant b$, а y_i—любые значения функции в них; все Δx_i должны совместно стремиться к нулю; но ни в каком случае не должно приписывать реального значения символу $y \cdot dx$, например как слагаемому суммы. Это обозначение сохранено лишь из вышеуказанных соображений целесообразности.

2. Такое понимание можно найти уже у Ньютона в очень точной форме. Я приведу одно место в его главном произведении „Principia mathematica philosophiae naturalis", вышедшем в 1687 г.[1]): „Ultimae rationes illae, quibuscum quantitates evanescunt, revera non sunt rationes quantitatum ultimarum, sed limites, ad quos quantitatum sine limite decrescentium rationes semper appropinquant, et quos propius assequi possunt, quam pro data quavis differentia, nonquam vero transgredi neque prius attingere quam quantitates diminuuntur in infinitum" („Эти последние отношения, с достижением которых количества исчезают, в действительности не суть отношения последних количеств, а представляют собою пределы, к которым стремятся отношения постоянно убывающих количеств и которых они скорее могут достичь, чем при каком-нибудь данном наращении; превзойти их или достичь раньше, чем количества уменьшатся до бесконечности, они не могут".) Впрочем, Ньютон совершенно избегает в этом сочинении применения исчисления бесконечно-малых, хотя он, несомненно, пользовался им при первоначальном выводе своих результатов. Действительно, основное произведение, в котором он развивает свой метод бесконечно-малых, Ньютон написал уже в 1671 г., хотя появилось оно впервые лишь в 1736 г. под названием „Methodus fluxiorum et serierum infinitarum"[2]) („Метод флюксий и бесконечных рядов").

В этом произведении Ньютон развивает, не вдаваясь в разъяснения принципиального характера, новое счисление на многочисленных примерах. При этом он примыкает к одному представлению из повседневной жизни, которое делает весьма понятным предельный переход, а именно, если рассматривать движение $x=f(t)$ вдоль оси x-ов в момент t, то всякий имеет определенное представление о том, что называется скоростью такого движения;

[1]) Reprinted for W. Thomson and H. Blackurn. Glasgow 1871, pag. 38.
[2]) J. Newtoni Opuscula, т. I (Lausannae 1744), pag. 29.

если присмотреться ближе, то увидим, что это в сущности и есть предел отношения конечных приращений $\frac{\Delta x}{\Delta t}$. Эту скорость, с которой переменная x изменяется во времени, Ньютон и принимает за основание своих рассуждений, как флюксию $\dot{x}$ переменной x. Он представляет себе, что все переменные x, y зависят от этой первичной переменной, времени t, так что производная является частным двух флюксий $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$, что мы записали бы теперь подробнее так:

$$\left(\frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt}\right).$$

3. К этим идеям Ньютона примыкает целый ряд математиков XVIII в., которые с большей или меньшей строгостью строили исчисление бесконечно-малых на понятии о пределе. Я назову лишь несколько имен: Маклорен (C. Maclaurin), написавший „Treatise of fluxions"[1] („Трактат о флюксиях"), который в качестве учебника имел обширный круг влияния; затем Даламбер (d'Alembert), участвовавший в большой французской „Методической энциклопедии" („Encyklopédie méthodique"); наконец, Кестнер (Kästner), живший здесь в Геттингене, проводил те же идеи в своих лекциях и книгах[2]). Наконец, и сам Эйлер принадлежит, главным образом, к этому же направлению, хотя у него, пожалуй, проглядывают уже и другие тенденции.

4. Но во всех этих построениях анализа оставался еще один существенный пробел, без заполнения которого не могло быть и речи о последовательной системе исчисления бесконечно-малых; тогда хотя и знали определение производной как предела, но нехватало еще средства для того, чтобы, обратно, по данному значению производной определить величину приращения функции в конечном промежутке. Таким средством является теорема в среднем значении, и великой заслугой Коши (Cauchy) является то, что он вполне оценил центральное значение этой теоремы и соответственно этому

[1]) Edinburgh 1742.

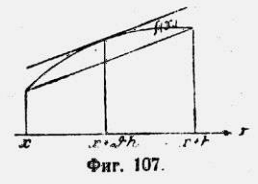
[2]) A. G. Kästner, Anfangsgrunde der Analysis des Unendligen, Göttingen 1760.

поставил ее во главе диференциального исчисления. Поэтому не будет преувеличением, если мы назовем его основателем точного анализа бесконечно-малых в современном смысле. Основное значение имеют в данном отношении его „Resumé des leçons sur le calcul infinitésimal"[1]), составленное на основании его лекций в Париже, а также второе издание их, в котором появилась только первая часть под заглавием „Leçons sur le calcul différentiel"[2]).

Теорема о среднем значении заключается в следующем: если $f(x)$ представляет непрерывную функцию, обладающую во всех точках рассматриваемого интервала производною $f'(x)$, то всегда найдется между x и $x+h$ такое значение $x+\theta h$, что

$$f(x+h) = f(x) + h \cdot f'(x+\theta h), \quad (0 \leqslant \theta \leqslant h).$$

В это выражение входит характерная для теорем о средних значениях величина θ, которая начинающему часто на первых порах представляется такой удивительной. В геометрической форме эта теорема представляется весьма наглядной: она утверждает лишь, что между точками x и $x+h$ всегда найдется на кривой такая точка $x+\theta h$, в которой касательная к кривой параллельна хорде (фиг. 107), соединяющей точки x и $x+h$.



Фиг. 107.

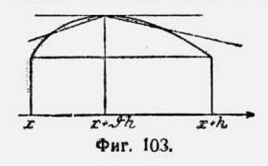
5. Как же доказать строго арифметически теорему о среднем значении, не прибегая к геометрическим представлениям? Такое доказательство должно, конечно, состоять только в том, что доказываемую теорему сводят на абстрактно установленные раньше в самой точной форме арифметические определения переменных, функций, непрерывности и тому подобных понятий. В этом смысле впервые нашли вполне строгое доказательство Вейер-

[1]) Paris, 1823, перепечатано в „Oeuvres complètes", sér. II, t. IV (Paris 1889).

[2]) Paris 1829, „Oeuvres complètes", sér. II, t. IV (Paris 1889).

штрасс и его последователи, которым мы вообще обязаны современным арифметическим представлением о числовом континууме. Я хотел бы отметить здесь лишь характерные моменты этих рассуждений.

Прежде всего нетрудно свести нашу теорему к тому случаю, когда секущая, ограничивающая нашу дугу, горизонтальна, т. е. когда $f(x) = f(x+h)$ (фиг. 108); в этом случае требуется показать, что существует точка, в которой касательная горизонтальна. А для этого служит знаменитая теорема Вейерштрасса, по которой всякая непрерывная в некотором промежутке функция действительно принимает в нем, по крайней мере, один раз свое наибольшее и наименьшее значение. По крайней мере, одно из этих наибольших и наименьших значений должно лежать внутри промежутка $(x, x+h)$, если исключить тривиальный случай, когда функция равна постоянной величине. Предположим, что это — максимум и что он приходится в точке $x+\theta h$, тогда $f(x)$ справа и слева от этого места имеет меньшие значения; поэтому отношение конечных приращений имеет справа отрицательное, а слева положительное значение. Следовательно, производную, которая, по предположению, должна существовать в каждой точке, можно представить в точке $x+\theta h$ как предел либо только положительных, либо только отрицательных значений, смотря по тому, будем ли мы рассматривать ее как предел отношений конечных разностей слева или как предел таких же отношений справа от рассматриваемой точки. Поэтому производная может равняться только нулю, и таким образом оказываются доказанными существование горизонтальной касательной и вместе с тем и теорема о среднем значении.



Фиг. 103.

Параллельно с этим направлением, с которым мы теперь познакомились и в духе которого построена современная научная математика, в течение столетий существовало и распространялось другое существенно отличное понимание исчисления бесконечно-малых.

1. Оно исходит из старых метафизических спекулятивных соображений о построении континуума из неразложимых далее последних „бесконечно-малых" составных частей. Уже в древности встречаются намеки на такого рода представления, а у схоластиков и затем у философов-иезуитов они встретили большое сочувствие. Как на характерный пример я укажу на заглавие уже упомянутой книги Кавальери „Geometria indivisibilibus continuorum" („Геометрия сплошных величин, состоящих из неделимых"), которое указывает на его истинное основное воззрение. Действительно, точка зрения приближенного определения играет у Кавальери лишь второстепенную роль; он фактически считает пространство состоящим из неделимых последних составных частей, из „indivisibilia". Вообще, для полного уяснения этого рода концепции очень важно и интересно быть знакомым с теми различными расчленениями, какие представление о континууме испытало в течение ряда столетий (и даже тысячелетий).

2. К такого же рода воззрениям примыкает и Лейбниц, который разделяет с Ньютоном славу изобретения исчисления бесконечно-малых. Для него первичным элементом исчисления бесконечно-малых является не производная как предел, а диференциал dx переменной x, который имеет реальное существование как последняя неделимая составная часть оси абсцисс, как величина, которая меньше всякой конечной величины и все же не равна нулю (актуально бесконечно малая величина). Аналогично этому диференциалы высших порядков d^2x, d^3x,... определяются как бесконечно малые величины второго, третьего,... порядков, из которых каждая бесконечно мала по сравнению с предыдущей; таким образом мы получаем ряд качественно различных систем величин.

Впрочем, у Лейбница это воззрение отнюдь не является единственным; во многих случаях у него выступает на первый план точка зрения приближенного определения, согласно которой диференциал dx представляет конечный, но столь малый отрезок, что вдоль него отклонение кривой от касательной совершенно незаметно, неуловимо. Эти метафизические спекуляции представляют, разумеется, лишь идеализацию простых психологических фактов, имеющих здесь место.

Совершенно отдельно стоит у Лейбница третий взгляд, который, пожалуй, наиболее для него характерен; это —

формальное представление. Я уже не раз имел случай отметить, что в лице Лейбница мы должны видеть основателя формальной математики. Идея, о которой идет речь, заключается в следующем: совершенно безразлично, какое именно значение имеют диференциалы и даже имеют ли они таковое вообще, лишь бы были соответственным образом определены правила действий с ними; в таком случае, если поступать с диференциалами согласно правилам, то должно, во всяком случае, получиться нечто разумное, правильное. При этом Лейбниц постоянно указывает на аналогию с комплексными числами, о которых у него были представления, вполне соответствующие этому взгляду. Говоря о правилах действий с диференциалами, мы имеем в виду, главным образом, формулу:

$$f(x + dx) - f(x) = f'(x) \cdot dx;$$

теорема о среднем значении показывает, что эта формула будет верна только в том случае, если написать в ней $f'(x + \Theta \cdot dx)$ вместо $f'(x)$; но содержащаяся здесь ошибка есть бесконечно-малая величина высшего (второго) порядка, а на такие величины — и в этом заключается главное формальное правило — не должно обращать внимания при вычислениях с диференциалами.

Самые важные работы, опубликованные Лейбницем, помещены в знаменитом научном журнале. „Acta eruditorum“ за 1684, 1695 и 1712 гг.[1]). В первом из этих томов находится статья под заглавием „Nova methodus pro maximis et minimis“ (стр. 467 и сл.); она представляет собой первое вообще печатное произведение, посвященное диференциальному исчислению, а именно Лейбниц излагает в ней попросту правила диференцирования. Позднейшие работы дают также разъяснения принципиального характера, в которых особенно заметно выступает формальная точка зрения.

В особенности характерна в этом отношении небольшая работа, напечатанная в 1712 г. [2]), т. е. в последние годы жизни Лейбница; в ней Лейбниц говорит как раз

[1]) Частью переведены в собрании: Ostwalds Klassiker, № 162 (Herausgeg. von G. Kowalewski, Leigpzig 1908). Помещено также в собрании математических сочинений Лейбница: „Leibnitzens Mathematische Schriften“. Herausgegeben von gerhardt, von 1849 an.

[2]) Observatio...; et de vero sensu Methodi infinitesimalis“, prg. 167—169.

о теоремах и определениях, которые суть лишь „toleranter vera“ или по-французски „passables“: „Rigorem quidem non sustinent, habent tamen usum magnum in calculando et ad artem inveniendi universalesque conceptus valent“ („ибо они не выдерживают строгой критики, но тем не менее находят большое применение в вычислениях и годятся как эвристическое средство и для уяснения общих понятий“). Это Лейбниц относит как к комплексным числам, так и к бесконечности; например, когда мы говорим о бесконечно-малом, то „commoditati expressionis seu breviloquio mentalis inservimus, sed non nisi toleranter vera loquimur, quae explicatione rigidantur“ („пользуемся ими для удобства выражения и для сокращения речи, но высказываем лишь относительные истины, которые укрепляются объяснением“).

3. Начиная с Лейбница, новое исчисление быстро распространяется по континенту, причем каждая из трех его установок находит своих представителей. Прежде всего я должен назвать первое руководство по диференциальному исчислению, какое только было вообще опубликовано; это „Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des courbes“ (Paris 1696, 2 éd., 1715) Делопиталя (de l'Hôpital), одного из учеников Ивана Бернулли, который, с своей стороны, поразительно быстро перенял новые идеи от Лейбница и даже выпустил в свет первое руководство по интегральному исчислению[1]). В этой книге проводится точка зрения приближенного определения; так, например, кривую Делопиталь рассматривает как многоугольник с очень малыми сторонами, касательную — как продолжение такой стороны (стр. 11). Распространению диференциального исчисления Лейбница в Германии особенно содействовал Христиан Вольф (Christian Wolff) в Галле (Halle), опубликовавший содержание своих лекций в „Elementa matheseos universae“[2]). Вольф в самом начале диференциального исчисления вводит диференциалы Лейбница, но при этом особенно подчеркивает, что они не имеют ни-

[1]) В немецком переводе выпущено в свет Г. Ковалевским, Ostwalds Klassiker № 194. П. Шафгейтлин (P. Schafheitlin) недавно открыл и описал „Диференциальное исчисление“ Ивана Бернулли. Verhandlungen der Naturforschergesellschaft in Basel, Bd. 32,1921.

[2]) Впервые появились в 1710 г. Новое издание: Ed nov. Hallae, Magdebourgiae 1742, pag. 545.

какого реального эквивалента. А относительно всего того, что для нашего восприятия является бсконечно-малым, он проводит снова исключительно точку зрения приближенного определения. Так, в виде примера, Вольф говорит, что высота горы не испытает изменения, заметного для практического измерения, если снять с нее или прибавить пылинку.

4. Нередко встречается также метафизическое представление, приписывающее диференциалам реальное существование. Особенно оно распространено среди философов; но и среди представителей математической физики оно находит немало приверженцев. К числу последних принадлежал, между прочим, Пуассон (Poisson), который в предисловии к своему знаменитому трактату по механике („Traité de mécanique", 2-е изд., Paris 1833, t. I, стр. 14) в очень категорической форме высказывается в том смысле, что бесконечно малые величины не только представляют орудие исследования, но даже вполне реально существуют.

5. Вероятно, вследствие философской традиции это представление перешло в популярную учебную литературу и играет в ней большую роль и по сию пору. Для примера я назову учебник Любсена (Lübsen) „Введение в исчисление бесконечно-малых" [1]), впервые появившийся в 1855 г. и с тех пор имевший долгое время, — быть может, и теперь еще — необычайное влияние на широкие круги публики; в мое время, несомненно, всякий — в ученические годы или позже — брал в руки эту книгу, и многие из нее впервые почерпнули побуждение к дальнейшему изучению математики. Любсен сперва определяет производную при помощи понятия о пределе, но наряду с этим, начиная со второго издания, помещает то, что он считает истинным исчислением бесконечно-малых, — мистические операции над бесконечно малыми величинами. Соответствующие главы помечены звездочкой в знак того, что они не содержат нового материала. Здесь диференциалы вводятся как последние доли, которые возникают, например, при последовательном делении конечной величины пополам, в бесконечном, не поддающемся определению числе; каждая из таких долей, „хотя и отлична от абсолютного нуля, но не

[1]) „Einleitung in die Infinitesimalrechnung", 8 Aufl., Leipzig, 1899.

поддается установлению; она представляет собой бесконечно-малую (Infinitesimalgrösse), дуновение, мгновение"; далее следует английская цитата: „Бесконечно-малое — это дух отошедшей величины" (стр. 59, 60). Дальше, в другом месте (стр. 76) читаем еще: „Метод бесконечно-малых, как видит читатель, очень тонкий, но правильный. Если же это недостаточно явствует из предыдущего и последующего, то причиной этого являются недостатки нашего изложения". Весьма интересно познакомиться с этими рассуждениями ближе.

Для сопоставления я назову еще распространенный „Курс опытной физики" Вюлльнера [1]), в котором первому тому предпослано краткое изложение диференциального и интегрального исчисления; этим автор имеет в виду дать возможность ознакомиться с необходимыми для физики сведениями из анализа бесконечно-малых естественникам и медикам, которые в гимназии не приобрели этих знаний. Вюлльнер начинает (стр. 31) с определения того, что такое бесконечно-малая величина dx, и затем переходит к более трудному определению второго диференциала d^2x. Просмотрите это введение с точки зрения математика и подумайте о том, какое получается противоречие: в школе изгоняют анализ бесконечно-малых как слишком трудный предмет, а потом приходится постигнуть его при помощи такого рода изложения на 10 страницах, не только совершенно неудовлетворительного, но и крайне трудного для понимания.

Причину живучести подобных воззрений наряду с математически точным методом пределов надо искать в весьма распространенной потребности заглянуть, минуя абстрактно-логические рассуждения способа пределов, поглубже в самую природу непрерывных величин; желают составить себе о ней более конкретные представления, чем те, которые возникают, когда мы подчеркиваем только психологические моменты, определяющие понятие о пределе. В этом отношении характерен один афоризм, который, насколько я знаю, принадлежит философу Гегелю и в прежнее время часто повторялся в книгах и лекциях; он утверждает, что функция $y = f(x)$ изображает бытие (das Sein)

[1]) Wüllner, Lehrbuch der Experimentalphysik, 6 Aufl., Leipzig, 1907.

вещей, а производная — их становление (das Werden). Конечно, в этом утверждении есть нечто заманчивое, но только надо ясно сознавать, что подобные фразы нисколько не содействуют дальнейшему развитию математики, ибо последняя нуждается в более точных понятиях.

В новейшей математике „актуально" бесконечно малые величины снова попали в честь, но только в совершенно ином порядке идей; именно мы встречаем их в геометрических исследованиях Веронезе (Veronese), а также в „Основаниях геометрии" („Grundlagen der Geometrie", 5. Aufl., Leipzig 1922) Гильберта (Hilbert). Идея, которую я имею в виду, в самых кратких словах сводится к следующему. Рассматривают геометрию, в которой задание $x = a$ (a — обыкновенное вещественное число) определяет собой не одну только точку оси x-ов, а бесконечное множество точек, абсциссы которых отличаются между собой на конечные кратные бесконечно-малых величин различных порядков η, ζ...; таким образом точка будет определена, если дано

$$x = a + b\eta + c\zeta + \ldots,$$

где a, b, c,... означают обыкновенные вещественные числа; η, ζ, суть... актуально бесконечно-малые возрастающих порядков. У Гильберта вопрос поставлен так: он устанавливает относительно введенных таким образом величин особые положения в качестве аксиом и при их помощи обнаруживает, что с ними можно оперировать без риска впасть во внутреннее противоречие. Самый важный момент представляет при этом надлежащий выбор критериев сравнения числа x и второго числа $x_1 = a_1 + b_1\eta + c_1\zeta + \ldots$ Прежде всего, конечно, устанавливают, что x больше или меньше x_1, если a больше или меньше a_1, если же $a = a_1$, то вопрос о сравнении величин решают вторые коэфициенты в том смысле, что $x \gtreqless x_1$, если $b \gtreqless b_1$; если же и $b = b_1$, то коэфициенты c дают решение вопроса и т. д. Вы поймете это лучше всего, если не будете пытаться связывать с написанными буквами никаких особенных представлений.

Оказывается, что с такими объектами можно оперировать по этим и еще другим указываемым далее правилам

совершенно аналогично тому, как оперируют с конечными числами; при этом отпадает только одна существенно важная теорема, имеющая место в системе обыкновенных вещественных чисел, а именно теорема, гласящая, что ко всяким двум положительным числам e и a, как бы мало ни было первое из них и как бы велико ни было второе, можно подыскать такое целое число n, чтобы было $ne > a$. В данном случае из приведенных определений непосредственно вытекает, что любое конечное кратное $n \cdot \eta$ величины η всегда будет меньше всякого конечного положительного числа a; это именно свойство и характеризует η, как бесконечно малую величину. Точно так же всегда $n \cdot \zeta < \eta$, т. е ζ есть бесконечно малая величина высшего порядка, чем η. Такую систему чисел называют не-архимедовой, так как упомянутую теорему о конечных числах называют аксиомой Архимеда; Архимед устанавливает ее как недоказуемое — вернее как не допускающее дальнейшего доказательства — основное допущение относительно конечных чисел. Тот факт, что эта аксиома перестает иметь место, является характерным моментом для появления актуально бесконечно малых величин. Впрочем, присвоение этой аксиоме имени Архимеда, как и большинство других именных обозначений, является исторически неточным: уже за сто лет до Архимеда ее высказал Евклид, который, повидимому, тоже не сам ее нашел, а заимствовал, как и очень многие другие из своих теорем, у Евдокса Книдского.

Изучение не-архимедовых величин, применяемых в особенности в качестве координат для построения „не-архимедовой геометрии" [1]), имеет целью более глубокое проникновение в сущность тех положений, которыми устанавливается непрерывность, и принадлежит к обширной группе исследований о логической зависимости различных аксиом обыкновенной геометрии и арифметики; с этой целью обыкновенно строят такую искусственную числовую систему, в которой имеет место только часть всех аксиом, и из этого заключают о логической независимости прочих аксиом от первых.

[1]) Не-архимедовыми величинами являются, например, так называемые рогообразные углы, которые хорошо знал уже Евклид. См., например, во 2-м томе настоящего сочинения статью, посвященную критике „Начал Евклида".

Естественно возникает вопрос о том, нельзя ли распространить на такие числовые системы анализ бесконечно-малых в строгой современной его постановке; другими словами, нельзя ли построить своего рода не-архимедов анализ. Первая и самая главная задача заключалась бы в доказательстве, на основании принятых аксиом, теоремы о среднем значении: $f(x+h)-f(x)=h\cdot f'(x+\theta h)$. Я не хочу утверждать, что в этом направлении успех невозможен, но во всяком случае, до сих пор никому из тех (а их немало!), кто занимается актуально бесконечно малыми величинами, не удалось добиться каких-либо положительных результатов в этом направлении.

Чтобы помочь вам лучше ориентироваться, я замечу еще, что со времени Коши термин „бесконечно малый" стали употреблять в современных учебниках в другом смысле. А именно, теперь никогда не говорят, что величина бесконечно мала, но говорят лишь, что она становится бесконечно малой, и видят в этом лишь удобное сокращенное обозначение того обстоятельства, что рассматриваемая величина неограниченно убывает, стремясь к нулю.

Теперь я должен упомянуть еще о той реакции, которую вызвало такое обоснование анализа на понятии о бесконечно-малых величинах. В этих представлениях очень скоро почувствовали что-то мистическое, недоказуемое; в результате нередко возникало даже предубеждение, будто диференциальное исчисление является особой философской системой, которую нельзя доказать, но в которую можно только верить, или даже прямо-таки, выражаясь грубо,— подвохом, плутней. Наиболее резким критиком в этом смысле является философ Бёркли (Berkeley), который в небольшой книжке под заглавием „Аналист"[1]) в весьма забавной форме вышучивает неясности, царившие в то время в математике. При этом Беркли исходит из той мысли, что по отношению к принципам и методам математики критика должна предоставить себе такую же свободу, какую математики применяют, в свою очередь, к тайнам религии, и затем самым ожесточенным образом нападает на все методы нового анализа — как на исчисление флюксий, так и на оперирование с диференциалами;

[1]) „The analyst", London 1734.

в результате он приходит к тому выводу, что все построение анализа неясно и совершенно непонятно.

Подобные воззрения сохранились и до настоящего времени именно среди философов; они все еще знают лишь операции с диференциалами и совершенно не усвоили себе способа пределов, разработанного в новейшее время до полной строгости. Для примера позвольте мне процитировать одно только место из книги Баумана „Пространство, время и математика"[1]), напечатанной в 60-х годах: „Таким образом мы отвергаем то логическое и метафизическое обоснование, которое дал счислению (Kalkül) Лейбниц, но самого счисления мы не касаемся. Мы считаем его гениальным изобретением, оправдавшим себя на практике скорее искусством, чем наукой; построить его чисто логически невозможно, из элементов обыкновенной математики оно не получается..."

Этой же реакцией против диференциалов следует объяснять и не раз уже упомянутую нами попытку Лагранжа (в его „Théorie des fonctions analytiques"), которая представляется нам теперь опять в новом освещении. Лагранж хочет совершенно удалить из теории не только бесконечно малые величины, но и вообще все предельные переходы; он ограничивается рассмотрением таких функций, которые можно определить посредством степенных рядов:

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\dots,$$

а их „производные функции $f'(x)$" (Лагранж не признает производной как отношения диференциалов и не употребляет символа $\frac{dy}{dx}$) определяет чисто формальным образом, а именно посредством нового степенного ряда:

$$f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\dots$$

В соответствии с этим, он говорит не о диференциальном исчислении, а об „исчислении производных" (Derivationskalkül). Но, конечно, такое изложение не могло долго удовлетворять математиков. Действительно, с одной стороны, определение функции, принимаемое Лагранжем,

[1]) Baumann, Raum, Zeit und Mathematik, Berlin 1869, Bd. II, стр. 55.

слишком узко, как мы это выше подробно выясняли; а с другой стороны — и это наиболее важно — такие исключительно формальные определения делают невозможным более глубокое понимание сущности понятия о производной или об интеграле; они совершенно не принимают во внимание того, что мы назвали психологическим моментом; вопрос о том, почему занимаются именно такими своеобразными „производными" рядами, остается без ответа. Наконец, без изучения пределов можно обойтись только в том случае, если оставить совершенно без внимания вопрос о сходимости этих степенных рядов; но лишь только мы захотим заняться этим вопросом — а это является, конечно, необходимым для действительного применения рядов, — как увидим себя вынужденными прибегнуть к тому же самому понятию о пределе, ради устранения которого и придумана вся система.

Этим я закончу краткий исторический очерк развития анализа бесконечно-малых; я по необходимости ограничился тем, что отметил значение наиболее выдающихся людей, игравших руководящую роль. Конечно, такой очерк следовало бы дополнить более подробным изучением литературы этого периода. Много интересных в этом смысле указаний вы можете найти в реферате Симона (Max Simon), представленном съезду естествоиспытателей в 1896 г. в Франкфурте, под заглавием: „К истории и философии диференциального исчисления".

Если в заключение мы окинем быстрым взглядом отношение школьного преподавания к исчислению бесконечно-малых, то увидим, что на первом отразился весь ход развития последнего. Всюду, где в прежнее время занимались в школе анализом бесконечно-малых, мы видим — судя, по крайней мере, по учебникам, а иначе и нельзя судить о деле преподавания — полное отсутствие ясного представления о точном научном построении анализа бесконечно-малых при помощи метода пределов; этот метод выступал лишь в более или менее расплывчатом виде; на первом плане стояли операции с бесконечно-малыми величинами, а подчас и исчисление производных, как его понимает Лагранж. Разумеется, такое преподавание было лишено не только строгости, но и доступности, и нет ничего удивительного в том, что посте-

пенно стало распространяться весьма резкое отрицательное отношение к преподаванию анализа в школе. В 70-х и 80-х годах дошли даже до прямого запрещения преподавать анализ, не исключая и реальных школ.

Но это, конечно, не помешало, как я уже раньше имел случай отметить, применению способа пределов в школе в тех случаях, когда в нем оказывалась необходимость; но только при этом избегали самого названия или даже иной раз, пожалуй, думали, что занимаются чем-то другим. Я приведу только три примера, которые большинству из вас знакомы из вашего школьного времени:

a) Общеизвестное вычисление длины окружности и площади круга по способу приближения к кругу посредством вписанных и описанных правильных многоугольников представляет, конечно, точное интегрирование. Как известно, этот способ весьма древнего происхождения, а именно принадлежит Архимеду; этому своему возрасту, восходящему до античной эпохи, он и обязан тем, что сохранился в школе.

b) Преподавание физики, в особенности ее механического отдела, нуждается безусловно в понятиях о скорости и ускорении и в их применении к законам падения тел. Но их вывод представляет не что иное, как интегрирование диференциального уравнения $z''=g$, приводящее к функции $z=\frac{1}{2}gt^2+at+b$, где a и b суть постоянные интегрирования. Этот вывод школа вынуждена дать ввиду требований, предъявляемых физикой, и те методы, какие школа применяет, представляют, конечно, более или менее точные методы интегрирования, но только в замаскированном виде.

c) Во многих школах Северной Германии проходят теорию максимумов и минимумов по способу, который называют там методом Шельбах (Schellbach), выдающегося педагога-математика, о котором все вы, вероятно, слыхали. Этот способ состоит в том, что для нахождения экстремумов функции $y=f(x)$ полагают:

$$\lim_{x=x_1}\left(\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\right)=0;$$

но это ведь и есть метод диференциального исчисления,

с тою лишь разницей, что не произносят слова „производная". Сам Шельбах воспользовался, конечно, этим приемом в таком виде, когда преподавание диференциального исчисления в школах было запрещено, а он не захотел отказаться от этих идей. Но его ученики переняли прием от него в том же виде, назвали его по имени учителя, и, таким образом, — это делается даже еще и теперь—ученикам преподносят как открытие Шельбаха вещи, которые были известны Лейбницу и Ньютону.

Позвольте мне в связи с этим охарактеризовать отношение к этому вопросу наших реформаторских стремлений, которые в настоящее время встречают в Германии, как и в других странах — в особенности во Франции — все больше и больше сочувствия и, надо надеяться, будут играть руководящую роль в преподавании математики в ближайшие десятилетия. *Мы хотим, чтобы понятия, обозначаемые символами* $y=f(x), \frac{dy}{dx}, \int y dx$, *стали знакомы ученику вместе с этими обозначениями, но не в виде новой абстрактной дисциплины, а в органической связи со всем преподаванием*; при этом нужно подвигаться вперед постепенно, начиная с самых простых примеров. Так, в 4-м и 5-м классах надо начинать с подробного изучения функции $y=ax+b$ при определенных численных значениях коэфициентов a, b и функции $y=x^2$, пользуясь клетчатой бумагой; при этом нужно стараться постепенно выяснить учащимся понятие о подъеме или падении кривой и о площади. В последнем классе можно будет сделать общий обзор приобретенных таким образом знаний, причем само собой обнаружится, что ученики вполне владеют основами или начатками анализа бесконечно-малых. Главная цель при этом должна заключаться в том, чтобы выяснить ученику, что здесь нет ничего мистического, что все это — простые вещи, которые всякий может понять.

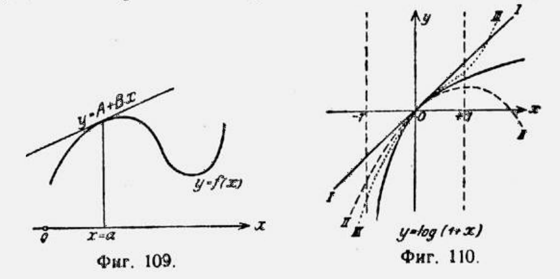
Неоспоримая необходимость таких реформ явствует из того, что они имеют в виду выяснение тех математических понятий, которые и теперь господствуют во всех без исключения приложениях математики во всевозможных областях и без которых совершенно теряет почву всякое обучение в высшей школе, начиная с простейших заня-

тий по опытной физике. Я могу ограничиться здесь этими краткими замечаниями, тем более, что как раз этот вопрос подробно разобран в книге Клейн-Шиммака (см. примечание на стр. 3).

Чтобы показать приложение этих общих рассуждений к конкретным вещам, я разберу подробнее один из вопросов исчисления бесконечно-малых, а именно теорему Тейлора (Taylor).

2. Теорема Тейлора.

Обращаясь к этому вопросу, я отклонюсь от изложения, обычно принятого в учебниках, в том же направле-



Фиг. 109. Фиг. 110.

нии, как и выше в главе о тригонометрических рядах; а именно, на первый план я поставлю конечный ряд, важный в практическом отношении, и наглядное выяснение всего материала при помощи чертежей. Благодаря этому все приобретает вполне элементарный характер и становится весьма понятным.

Я исхожу из такого вопроса: нельзя ли приближенно изобразить ход любой кривой $y=f(x)$ на некотором ее протяжении при помощи других возможно более простых кривых. Проще всего было бы заменить кривую в окрестности точки $x=a$ прямолинейной касательной к ней в этой точке (фиг. 109):

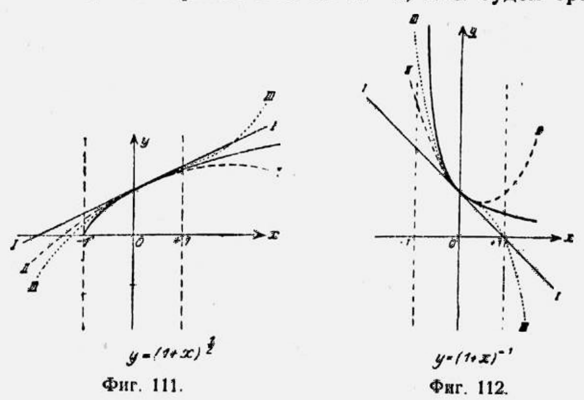
$$y=A+Bx;$$

так именно и поступают в физике и других приложениях всякий раз, когда при разложении функций в ряд сохра-

няют только первые степени независимой переменной, а остальные отбрасывают. Можно получить подобным же образом еще лучшие приближения, если воспользоваться параболами второго, третьего,... порядка:

$$y = A + Bx + Cx^2,\ y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3\ , \ldots,$$

или, выражаясь аналитически, многочленами высших степеней; применение их особенно целесообразно по той причине, что их удобнее всего вычислять. Мы будем так проводить эти кривые, чтобы они примыкали как можно теснее к данной кривой в точке $x = a$, т. е. будем брать



$y = (1+x)^{\frac{1}{2}}$

Фиг. 111.

$y = (1+x)^{-1}$

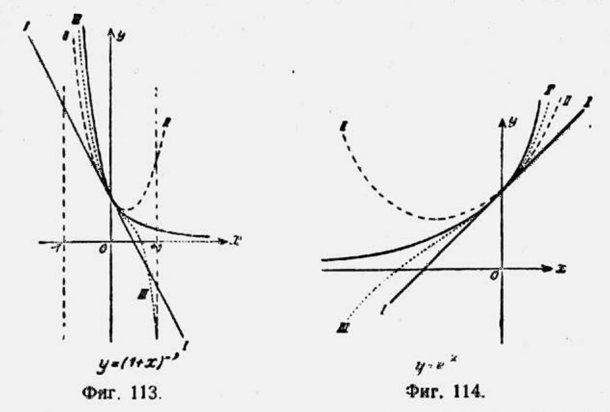
Фиг. 112.

соприкасающиеся параболы. Так, например, парабола второго порядка будет иметь с кривой $y = f(x)$ не только общую ординату, но и одинаковые первую и вторую производные (т. е. будет „соприкасаться“ с нею); у кубической параболы также и третья производная будет совпадать с третьей производной функции $y = f(x)$. Простое вычисление дает для соприкасающейся параболы n-го порядка такое аналитическое выражение:

$$y = f(a) + \frac{f'(a)}{1}(x-a) + \frac{f''(a)}{1\cdot 2}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{1\cdot 2 \ldots n}(x-a)^n;$$
$$(n = 1,\ 2, \ldots),$$

а это как раз первые n членов ряда Тейлора.

Исследование вопроса о том, представляют ли эти многочлены годные к употреблению приближенные кривые, и если представляют, то в какой именно форме,— это исследование мы начнем с рассуждений скорее опытного характера, как и в случае тригонометрических рядов (стр. 286 и сл.). Я могу показать вам на экране несколько чертежей соприкасающихся парабол первых порядков для



$y = (1+x)^{-2}$

Фиг. 113.

$y = e^x$

Фиг. 114.

некоторых простых кривых, которые изготовил также Шиммак. Это, прежде всего, следующие четыре функции вместе с их соприкасающимися параболами в точке 0; все они имеют при $x = -1$ особую точку (фиг. 110—113):

1. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$

2. $(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \ldots$

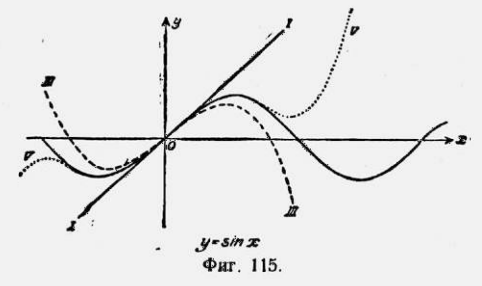
3. $(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$

4. $(1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4^3 + \ldots$

Чем выше порядок соприкасающихся парабол, тем больше они приближаются к оригинальной кривой в промежутке $(-1, +1)$; но замечательно, что справа от $x = +1$

они отклоняются от кривой вверх или вниз тем сильнее, чем выше их порядок.

В особой точке $x = -1$, в которой функции 1, 3, 4 становятся бесконечно большими, ординаты последовательных соприкасающихся парабол принимают все большие и большие значения. Во втором же случае, в котором кривая, изображаемая оригинальной функцией, имеет в точке $x = -1$ вертикальную касательную и не имеет продолжения влево от этой точки, последовательные



Фиг. 115.

параболы, хотя и продолжаются влево от этой точки, но все более и более приближаются в ней к оригинальной кривой, все круче и круче опускаясь книзу. В симметрично расположенной точке $x = +1$ в первых двух случаях параболы примыкают все ближе и ближе к оригинальным кривым; в третьем случае их ординаты попеременно равны единице и нулю, а ордината оригинальной кривой равна $\frac{1}{2}$; в четвертом случае параболы получают попеременно положительные и отрицательные значения, растущие до бесконечности.

Кроме того, у меня здесь имеются чертежи соприкасающихся парабол для двух целых трансцендентных функций (фиг. 114 и 115):

$$5.\ e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$6.\ \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Вы видите, что протяжение, на котором соприкасающиеся параболы представляют годные приближения к оригинальной кривой, становится тем больше, чем выше их порядок. В случае функции $\sin x$ особенно ясно видно, как параболы стараются все больше и больше подражать колебаниям синусоиды.

Замечу, что вычерчивание подобных кривых для наиболее простых случаев представляет, пожалуй, подходящий материал и для школы.

Собрав таким образом опытный материал, мы должны теперь перейти к рассмотрению вопроса с математической точки зрения. Здесь прежде всего возникает крайне важный в практическом отношении вопрос о той точности, с какой вообще соприкасающаяся парабола n-го порядка изображает оригинальную кривую,— так называемая о ц е н к а п о г р е ш н о с т и или о с т а т к а; сюда же примыкает, конечно, вопрос о переходе к бесконечно большому n: нельзя ли при помощи бесконечного степенного ряда точно изобразить данную кривую?

Я могу здесь ограничиться тем, что приведу наиболее известную теорему о величине остатка:

$$R_n(x) = f(x) - \left\{ f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \dots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) \right\}$$

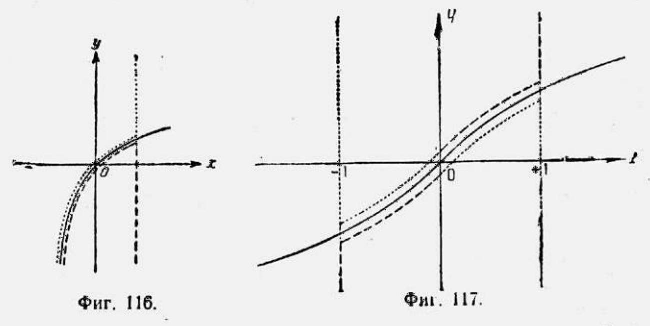
вывод ее вы найдете во всяком учебнике; кроме того, я вернусь еще позже к этому, исходя из более общей точки зрения. Теорема гласит: м е ж д у a и x с у щ е с т в у е т т а к о е п р о м е ж у т о ч н о е з н а ч е н и е ξ, что $R_n(x)$ м о ж н о п р е д с т а в и т ь в т а к о м в и д е:

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(\xi).$$

Вопрос о переходе к бесконечному ряду сводится теперь непосредственно к вопросу о том, стремится ли этот остаток $R_n(x)$ при беспредельном возрастании n к пределу нуль или нет.

В применении к нашим примерам отсюда выводят — и это вы тоже найдете во всяком учебнике, — что прежде всего в 5 и 6 примерах бесконечный ряд сходится для всех значений x. Что же касается первых четырех примеров, то оказывается, что бесконечный ряд сходится для

всех значений x, заключенных между $+1$ и -1, причем сумма его равна первоначально заданной функции, но вне этого промежутка ряд расходится. При $x=-1$ во втором примере ряд сходится, имея суммой величину функции в этой точке; а в 1, 3 и 4 примерах сумма ряда стремится к бесконечности так же, как и значение самой функции, так что и в этом случае можно было бы, собственно, говорить о сходимости; но по традиции этого термина не употребляют в случае рядов с явно бесконечным пределом. Наконец, при $x=+1$ мы имеем дело



Фиг. 116. Фиг. 117.

со сходимостью в обоих первых и с расходимостью в обоих последних примерах. Все это прекрасно согласуется с результатами изучения наших чертежей. Но можно задать себе, как и в случае тригонометрических рядов, такой вопрос: к каким предельным положениям стремятся соприкасающиеся параболы, когда мы смотрим на них чисто геометрически — как на кривые? Ведь они не могут внезапно оборваться при $x=\pm 1$. Для $\ln(1+x)$ эти предельные кривые изображены приближенно на фиг. 116, а именно оказывается, что четные и нечетные параболы стремятся к двум различным предельным положениям, состоящим из части логарифмической кривой, заключенной между -1 и $+1$, и из примыкающей к ней в точке $x=+1$ нижней, и соответственно верхней, половины вертикали $x=+1$. Аналогично обстоит дело и в остальных трех случаях.

Теоретическое исследование ряда Тейлора находит свое завершение лишь при переходе к мнимым переменным, ибо только тогда становится понятным внезапное прекращение сходимости степенных рядов в совершенно определенных точках функции. Конечно, в наших четырех примерах можно считать, что это явление в точке $x=+1$ объясняется в достаточной степени тем обстоятельством, что ряд не может сходиться справа дальше, чем он сходится слева; слева же сходимость должна прекращаться в точке $x=-1$, ибо это — особая точка для рассматриваемых функций. Но уже в нижеследующем примере это рассуждение оказывается неприменимым. Ряд Тейлора для ветви функции $\operatorname{arc\,tg} x$, которая остается правильной при всех вещественных значениях x:

$$\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - , \ldots,$$

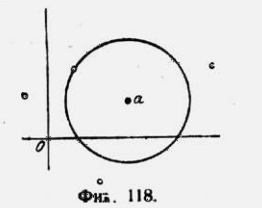
сходится только в промежутке $(-1, +1)$, а соприкасающиеся параболы поочередно стремятся к предельным кривым, изображенным черточным и точечным пунктиром (фиг. 117). Внезапное прекращение сходимости во вполне определенных точках $x=\pm 1$ совершенно не поддается пониманию, если оставаться в области вещественных переменных.

Объяснение заключается в замечательной теореме о круге сходимости, которая представляет самое прекрасное открытие, сделанное Коши (Cauchy) в теории функций: эта теорема гласит: *если отметить в комплексной плоскости x все особенные точки аналитической функции $f(x)$, то ряд Тейлора для этой функции, относящийся к точке $x=a$, сходится внутри той окружности, описанной около a как центра, которая проходит через ближайшую особую точку; этот ряд не сходится ни для одной точки, лежащей вне этой окружности* (фиг. 118).

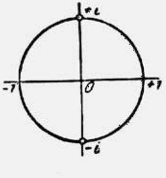
Для функции $\operatorname{arc\,tg} x$, как известно, значения $x=\pm i$ представляют особенные точки; поэтому кругом сходимости для разложения по степеням x является круг радиуса 1 с центром в точке $x=0$. Вследствие этого сходимость должна прекращаться в точках $x=\pm 1$, в кото-

рых ось вещественных чисел выходит за пределы круга сходимости (фиг. 119).

Что же касается сходимости ряда на самом круге радиуса 1, то по этому вопросу я должен ограничиться следующим указанием, примыкающим к подчеркнутой выше связи между степенными и тригонометрическими рядами: упомянутая сходимость зависит от того, можно ли вещественную и мнимую часть функции на круге сходимости вместе с теми особенностями, какими они там необходимо обладают, разложить в сходящиеся тригонометрические ряды.



Фиг. 118.

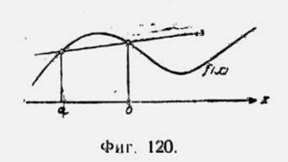


Фиг. 119.

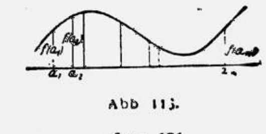
Я хочу еще оживить теорему Тейлора тем, что покажу, в каком отношении она стоит к проблемам интерполирования и разностного исчисления. И в этих дисциплинах занимаются вопросом о том, чтобы приближенно изобразить заданную кривую при помощи параболы; но здесь вопрос ставится иначе; здесь парабола не должна примыкать к данной кривой в одной определенной точке, а напротив, требуется, чтобы она пересекала заданную кривую в нескольких, заранее указанных точках; вопрос снова заключается в том, в какой мере такая „интерполяционная парабола" представляет пригодное приближение. В простейшем случае разница сводится к тому, что кривую заменяют не ее касательной, а ее секущей (фиг. 120); далее, аналогично исследуют квадратичную параболу, проходящую через три точки данной кривой, кубическую параболу, проходящую через четыре точки и т. д.

Такая постановка вопроса в теории интерполирования является вполне естественной и применяется необычайно часто, например при употреблении численных логарифмических таблиц. Действительно, в этом случае как раз допускают, что логарифмическая кривая проходит между двумя значениями, данными в таблице, по прямой линии, и поэтому интерполируют линейно по обычному способу, пользуясь „табличками разностей". Если же это не дает достаточно точных результатов, то применяют и квадратичную интерполяцию.

По отношению к этой общей задаче определение соприкасающихся парабол по теореме Тейлора представляет частный случай, а именно здесь все точки пересечения кривой с интерполяционными параболами сливаются в одну точку. Конечно, при такой замене кривой



Фиг. 120.



Фиг. 121.

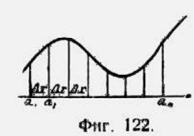
соприкасающимися параболами слово „интерполирование", собственно говоря, не подходит; но, с другой стороны, в задачу *интерполирования* всегда включают также и *экстраполирование*; так, например, секущую сравнивают с кривой не только между ее точками пересечения, но и вне их. Поэтому для обозначения всего способа в целом более целесообразным представляется, пожалуй, общее выражение „приближение" (Approximation).

Теперь я намерен указать наиболее важные интерполяционные формулы. Поставим себе прежде всего целью определить параболу $(n-1)$-го порядка, которая пересекала бы данную кривую в n произвольно выбранных точках $a_1, a_2, \ldots, a_n$, т. е. чтобы ее ординаты в этих точках были равны $f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n)$ (фиг. 121). Эту задачу разрешает интерполяционная формула Лагранжа:

$$\left.\begin{aligned} y = {} & \frac{(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_n)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots(a_1-a_n)} f(a_1) + \\ & + \frac{(x-a_1)(x-a_3)\ldots(x-a_n)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)\ldots(a_2-a_n)} f(a_2) + \ldots \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

В этой формуле в общем содержится n членов с множителями $f(a_1)$, $f(a_2)\ldots$, $f(a_n)$; в числители этих членов не внесены последовательно множители $(x-a_1)$, $(x-a_2)$, ..., $(x-a_n)$. Справедливость этой формулы можно сразу проверить: с одной стороны, все слагаемые выражения y, а следовательно, и само y, представляют многочлены $(n-1)$-й степени относительно $x-a$; с другой стороны, все дроби, кроме первой, обращаются при $x=a_1$ в нуль, а первая обращается при этом в единицу, так что y оказывается равным $f(a_1)$; точно так же $y=f(a_2)$ при $x=a_2$ и т. д.

Из этой формулы можно получить, как ее частный случай, формулу Ньютона, которая исторически, конечно, гораздо старше формулы Лагранжа. Формула Ньютона относится к тому случаю, когда даны равноотстоящие абсциссы a_1, $a_2, \ldots$, a_n (фиг. 122). В этом случае имеют большое преимущество обозначения, принятые в разностном исчислении, и поэтому мы сперва познакомимся с последними.



Фиг. 122.

Пусть Δx обозначает некоторое приращение переменной x, а $\Delta f(x)$ — соответственное приращение функции $f(x)$, так что

$$f(x+\Delta x)=f(x)+\Delta f(x).$$

Но $\Delta f(x)$, в свою очередь, представляет некоторую функцию от x, которая при изменении переменной x на Δx имеет определенную разность — так называемую „вторую разность" $\Delta^2 f(x)$:

$$\Delta f(x+\Delta x)=\Delta f(x)+\Delta^2 f(x);$$

аналогично полагаем далее:

$$\Delta^2 f(x+\Delta x)=\Delta^2 f(x)+\Delta^3 f(x)$$

и т. д.

Эти обозначения вполне аналогичны обозначениям дифференциального исчисления, с той только разницею, что здесь мы имеем дело с определенными конечными величинами и ни о каких предельных переходах нет речи.

Из написанных выше равенств, выражающих определения разностей, непосредственно вытекают такие выражения для значений функции f в последовательных равноотстоящих точках:

$$\left.\begin{aligned} f(x+\Delta x)&=f(x)+\Delta f(x),\\ f(x+2\Delta x)&=f(x+\Delta x)+\Delta f(x+\Delta x)=\\ &=f(x)+2\Delta f(x)+\Delta^2 f(x),\\ f(x+3\Delta x)&=f(x+2\Delta x)+\Delta f(x+2\Delta x)=\\ &=f(x)+3\Delta f(x)+3\Delta^2 f(x)+\Delta^3 f(x),\\ f(x+4\Delta x)&=f(x)+4\Delta f(x)+6\Delta^2 f(x)+4\Delta^3 f(x)+\Delta^4 f(x). \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Таким же простым образом выражаются значения функции f и в дальнейших равноотстоящих точках через последовательные разности f в первой точке x, причем в качестве множителей входят биномиальные коэфициенты.

Формула Ньютона выражает интерполирующую параболу $(n-1)$-го порядка для n равноотстоящих точек:

$$a_1=a,\ a_2=a+\Delta x, \ldots, a_n=a+(n-1)\,\Delta x,$$

т. е. такую параболу, которая при этих абсциссах имеет ординаты, равные соответствующим значениям функции $f(x)$; эта формула имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} y=f(a)&+\frac{x-a}{1!}\,\frac{\Delta f(a)}{\Delta x}+\\ &+\frac{(x-a)(x-a-\Delta x)}{2!}\,\frac{\Delta^2 f(a)}{\Delta x^2}+\ldots\\ &+\frac{(x-a)(x-a-\Delta x)\ldots(x-a-(n-2)\,\Delta x)}{(n-1)!}\,\frac{\Delta^{n-1} f(a)}{\Delta x^{n-1}}. \end{aligned}\right\} (3)$$

В самом деле, это, во-первых, многочлен $(n-1)$-й степени относительно x, во-вторых, при $x=a$, y приводится к $f(a)$; при $x=a+\Delta x$ все члены после второго отпадают, и остается $y=f(a)+\Delta f(a)$, что согласно равенствам (2) как раз равно $f(a+\Delta a)$, и т. д. Таблица (2) показывает, что этот многочлен во всех n точках принимает верные значения.

Если мы хотим в действительности применить с успехом одну из этих формул интерполирования, то нам надо еще знать что-нибудь относительно той точности, с которой они выражают функцию $f(x)$; другими словами, мы должны уметь оценить погрешность. Эту оценку указал Коши в 1840 г. [1]), и я охотно приведу здесь ее вывод

[1]) „Comptes Rendus", XI, стр. 175 и сл. или „Oeuvres", I ser., (Paris 1885, стр. 422.

Пусть x есть какое-нибудь значение, заключенное между значениями $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (мы исходим из общей формулы Лагранжа) или вне их (интерполирование или экстраполирование). Через $P(x)$ обозначим значение интерполирующей параболы $(n-1)$-го порядка, изображаемой формулой Лагранжа; через $R(x)$ обозначим остаток, так что:

$$f(x) = P(x) + R(x). \tag{4}$$

Согласно определению функции $P(x)$, остаток $R(x)$, несомненно, обращается в нуль при $x = a_1, a_2, \ldots, a_n$; поэтому мы полагаем:

$$R(x) = \frac{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)}{n!}\psi(x).$$

Выделение множителя $n!$ представляется удобным по той причине, что тогда множитель $\psi(x)$ оказывается равным значению n-й производной от $f(x)$ для некоторой промежуточной точки ξ, — промежуточной в том смысле, что она заключена внутри промежутка, занимаемого $n+1$ точками $a_1, a_2, \ldots, a_n, x$. То обстоятельство, что отклонение функции $f(x)$ от многочлена $(n-1)$-й степени зависит от общего хода изменения производной n-го порядка $f^{(n)}(x)$ становится вполне естественным, если принять во внимание, что функция $f(x)$ становится равной этому многочлену, если производная $f^{(n)}(x)$ обращается тождественно в нуль.

Что же касается доказательства этой формулы остатка, то его удается провести при помощи такого приема: составляем функцию от новой переменной z:

$$F(z) = f(z) - P(z) - \frac{(z-a_1)(z-a_2)\ldots(z-a_n)}{n!}\psi(x)$$

где переменную x в функции $\psi(x)$ рассматриваем как параметр. Так как по определению $f(a_r) = P(a_r)$ $(r = 1, \ldots, n)$, то

$$F(a_1) = F(a_2) = \ldots = F(a_n) = 0.$$

Далее, находим, что и $F(x) = 0$, так как при $z = x$ последнее слагаемое переходит в $R(x)$ и вся правая часть в силу равенства (4) обращается в нуль. Таким образом мы знаем $n+1$ корней: $z = a_1, a_2, \ldots, a_n, x$ функции $F(z)$. Теперь применим теорему о среднем значении в обобщенном виде;

получаем посредством повторного применения этой теоремы в ее обычной форме (стр. 319): если некоторая непрерывная функция, имеющая n непрерывных производных, обращается в нуль в $n+1$ точках, то ее n-я производная обращается в нуль, по крайней мере, в одной точке промежутка, содержащего все эти $n+1$ корней. Поэтому, если только функция $f(z)$, а вместе с нею $F(z)$ обладает n непрерывными производными, то существует такая точка ξ, заключенная между крайними из значений $a_1, a_2, \ldots, a_n, x$, что

$$F^{(n)}(\xi) = 0.$$

Но

$$F^{(n)}(z) = f^{(n)}(z) - \psi(x),$$

так как n-я производная многочлена $(n-1)$-й степени P равна нулю, а в последнем слагаемом только высший член $\frac{1}{n!}z^n\psi(x)$ дает n-ю производную, отличную от нуля. Таким образом в результате находим:

$$F^{(n)}(\xi) = f^{(n)}(\xi) - \psi(x) = 0, \text{ т. е. } \psi(x) = f^{(n)}(\xi),$$

а это именно и требовалось доказать.

Я выпишу подробно, в частности, интерполяционную формулу Ньютона с ее остаточным членом:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!}\frac{\Delta f(a)}{\Delta x} + \frac{(x-a)(x-a-\Delta x)}{2!}\frac{\Delta^2 f(a)}{\Delta x^2} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(x-a)\ldots(x-a-(n-1)\Delta x)}{n!}f^{(n)}(\xi), \tag{5}$$

где ξ означает некоторое среднее значение, заключенное в промежутке, содержащем $n+1$ точек $a, a+\Delta x, \ldots, a+(n-1)\Delta x, x$. Эта формула действительно незаменима в применениях. Я уже указывал на линейное интерполирование при пользовании таблицами логарифмов; для $f(x) = \lg(x)$ и $n = 2$ формула (5) дает:

$$\lg x = \lg a + \frac{x-a}{1!}\frac{\Delta \lg a}{\Delta x} - \frac{(x-a)(x-a-\Delta x)}{2!}\frac{M}{\xi^2}$$

ибо $\frac{d^2 \lg x}{dx^2} = -\frac{M}{x^2}$, если через M обозначить модуль взя-

той системы логарифмов); это дает нам выражение для той ошибки, какую мы совершаем при линейном интерполировании между двумя логарифмами чисел a и $a+\Delta x$, взятыми из таблицы. Между прочим, из этой формулы видно, что эта ошибка получает различный знак, в зависимости от того, лежит ли число x между числами a и $a+\Delta x$ или вне их. Строго говоря, эту формулу должен был бы знать всякий, кому приходится иметь дело с таблицами логарифмов.

Я не буду больше останавливаться на приложениях, а перейду к замечательной аналогии между интерполяционной формулой Ньютона и строкой Тейлора. В основе этой аналогии лежит следующее обстоятельство: из формулы Ньютона можно очень легко и притом совершенно строго вывести ряд Тейлора с остаточным членом; этот вывод вполне соответствует переходу от интерполяции к приближенным параболам. В самом деле, если при постоянных x, a и n приращение Δx стремится к нулю, то каждое из $n-1$ отношений между конечными разностями, встречающихся в равенстве (5), переходит в соответствующую производную [по предположению, ведь существуют первые n производных функций $f(x)$]:

$$\lim \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'\psi(x), \lim \frac{\Delta^2 f(x)}{\Delta x^2} = f''(x)$$

и т. д.

Отсюда следует, что множитель $f^{(n)}(\xi)$ последнего члена правой части тоже стремится к определенному пределу, а вследствие непрерывности функции $f^{(n)}(x)$ этим пределом опять является среднее значение $f(\xi)$. Итак, мы получаем совершенно строгое равенство:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(\xi) \quad (a \leqslant \xi \leqslant x).$$

Таким образом мы вполне доказали теорему Тейлора и в то же время показали, с каким изяществом ее можно привести в связь с общим учением об интерполяции.

Благодаря этой тесной связи с очень простыми вопросами и благодаря тому, что предельный переход здесь

так легок, я считаю этот вывод строки Тейлора лучшим из всех возможных выводов. Но не все математики, даже хорошо знакомые с этими вещами, — нужно, впрочем, заметить, что, как это ни странно, их часто не знают даже составители учебников, — держатся этого мнения; они обыкновенно принимают очень серьезный вид, приступая к предельному переходу, и предпочитают дать непосредственное доказательство теоремы Тейлора, чем вывод ее при помощи разностного исчисления.

Но я могу здесь же отметить, что исторически источником открытия ряда Тейлора было именно разностное исчисление. Как я уже упоминал, в первый раз этот ряд построил Тейлор (Brook Taylor) в своем „Methodus incrementorum [1])“; он там выводит сначала формулу Ньютона — конечно, без остаточного члена — и потом полагает в ней одновременно $\Delta x = 0$ и $n = \infty$; он вполне правильно получает из первых членов этой формулы первые члены нового ряда:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} \cdot \frac{df(a)}{dx} + \frac{(x-a)^2}{2!} \frac{d^2 f(a)}{dx^2} + \ldots$$

и считает очевидным, что этот ряд можно продолжать до бесконечности, — ни об остаточном члене, ни о сходимости у него нет и речи. Это неслыханный по своей смелости предельный переход. Первые члены, в которых встречается $x-a-\Delta x$, $x-2\Delta x, \ldots$, не представляют трудностей, так как при $\lim \Delta x = 0$ исчезает также Δx, повторенное конечное число раз. Но при дальнейшем возрастании n появляются в постоянно возрастающем числе члены, содержащие множители $x-a-k\,\Delta x$ с постоянно возрастающими значениями k, и мы, конечно, не имеем права обращаться с ними так, как с первыми членами, и предполагать, что мы получаем сходящийся ряд.

В сущности Тейлор здесь оперирует с бесконечно малыми величинами (диференциалами) гораздо, если можно так выразиться, легкомысленнее, чем это когда-либо делали последователи Лейбница: интересно отметить, что он еще в молодости (ему было 29 лет) и еще на глазах Ньютона так уклонился от метода пределов, которы

[1]) Londini 1715, pag. 21 — 23.

пользовался последний. Как бы там ни было, ему удалось таким образом сделать свое очень важное открытие.

Отличное критическое изложение истории развития этой теоремы можно найти в работе Альфреда Прингсгейма (Alfred Pringsheim: „Zur Geschichte des Taylorschen Lehrsatzes“ [1]). Я здесь хотел бы еще сказать несколько слов по поводу делаемого обыкновенно различия между рядом Тейлора и рядом Маклорена. Как известно, во всех учебниках под названием ряда Маклорена отдельно рассматривают частный случай ряда Тейлора при $a = 0$:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots,$$

и легко может притти в голову, что очень важно строго отличать один ряд от другого. Каждому знакомому с делом ясно, что с математической точки зрения это различие совсем несущественное, менее известно то обстоятельство, что оно исторически также является бессмыслицей. Во-первых, Тейлору принадлежит несомненный приоритет в отношении общей теоремы, к которой он пришел, как указано выше. Но, кроме того, он дальше (стр. 27) специально останавливается на той форме, которую его ряд получает при $a = 0$, и замечает, что в этом случае ряд можно получить также непосредственно, при помощи так называемаго способа неопределенных коэфициентов. Этим способом воспользовался в 1742 г. Маклорен в своей упомянутой выше (стр. 318) книге „Treatise of fluxions [2])“, причем он совершенно ясно ссылается на Тейлора и не заявляет претензии дать что-нибудь новое. Но на эту ссылку впоследствии не обратили внимания и стали считать автора учебника вместе с тем автором теоремы; таким образом ведь часто происходят ошибки. Только еще позже опять вспомнили про Тейлора и назвали его именем общую теорему. Очень трудно, — а может быть даже невозможно — бороться с такими укоренившимися нелепостями; можно только выяснить истинное положение дел в маленьком кругу тех математиков, которые интересуются историей своей науки.

[1]) „Bibliotheca mathematica“, 3 серия, 1 (1900), pag. 433 — 479.
[2]) Edinburgh 1742, vol. 11, pag. 610.

Мне хотелось бы прибавить к этому еще некоторые замечания исторического и педагогического характера.

3. Замечания исторического и педагогического характера.

Я отмечу раньше всего, что связь, которую Тейлор установил между разностным и диференциальным исчислениями, сохранялась в течение продолжительного времени: еще у Эйлера, в работах его, посвященных анализу, эти две дисциплины тесно связаны одна с другой, и формулы диференциального исчисления рассматриваются как предельные случаи совершенно элементарных соотношений, имеющих место в разностном исчислении. Это вполне естественное соединение двух наук продолжалось до тех пор, пока не появилось исчисление производных Лагранжа с его, не раз уже упомянутыми выше, формальными определениями. Я должен здесь указать на одно компилятивное сочинение конца XVIII в., в котором автор, становясь на почву учения Лагранжа, излагает все известные в то время факты исчисления бесконечно-малых; это „Traité du calcul différentiel et du calcul integral“, принадлежащее Лакруа (Lacroix [1]). Как характерный пример из этой работы, я приведу определение производной (I, pag. 145). Пусть некоторая функция $f(x)$ определена степенным рядом; пользуясь разложением бинома Ньютона и соединяя члены с одинаковыми степенями буквы h, мы получим:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{1}{2} h^2 f''(x) + \ldots$$

Лакруа просто обозначает член линейный относительно h через $d f(x)$ и, так как вместо h можно писать dx, получает для производной, или, как он это называет, для диференциального коэфициента, соотношение:

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x).$$

Это равенство получает, таким образом, совершенно формальный характер, хотя против правильности его нельзя возражать.

Понятно, что при таком характере изложения Лакруа не может исходить из разностного исчисления; он считает,

[1]) 3 тома. Paris 1797 — 1800 (2 éd. 1810 — 1813).

однако, последнее настолько важным для практики, что не решается вовсе его опустить, а дает его в виде самостоятельной дисциплины — и притом в очень подробной обработке — в III томе.

Историческое значение этой книги, которую называют „большой Лакруа“, состоит, главным образом, в том, что она является источником, из которого черпали материал многие учебники исчисления бесконечно-малых, появившиеся в XIX в.; раньше всего здесь нужно назвать учебник, составленный самим Лакруа, — „маленький Лакруа“.

Впрочем, начиная с 20-х годов этого столетия, наряду с влиянием Лакруа, в учебниках сказывается также влияние способа пределов, которому Коши возвратил его прежнее значение; я имею в виду, главным образом, французские учебники, выходившие под названием „Cours d'analyse de l'école polytechnique“ и предназначенные для высших учебных заведений. Немецкие учебники, за единственным исключением Шлемильха (Schlömilch), не носят самостоятельного характера, а зависят прямо или косвенно от французских. Из этой массы книг я выделю только „Cours de calcul différentiel et integral“ Серре, который в первый раз вышел в Париже в 1884 г.; Гарнак (A. Harnack) перевел его на немецкий язык, и он стал также в Германии одним из самых распространенных учебников. Книга подвергалась переработке несколько раз, и изложение сделалось ввиду этого неравномерным; но для недавно появившегося 3-го издания Шефферс (G. Scheffers, Charlottenburg) переделал ее опять и придал ей цельный характер [1]). Мне еще хотелось бы упомянуть об одной, совсем новой французской книге: это двухтомный „Cours d'analyse mathématique“ Гурса (Goursat) [2]); он по многим вопросам содержит гораздо больше материала, чем Серре, и в него входит целый ряд новейших исследований; кроме того, он очень доступно написан.

Во всех этих новых учебниках производная и интеграл определяются при помощи предельного перехода,— о разностном исчислении в них нет и речи. При таком изложении многое может стать более отчетливым, но

[1]) J. A. Serret u. S. Scheffers, Lehrbuch der Diff. u. Integralrechnung. Bd. I—II, Leipzig 1906, 1907.

[2]) Paris 1902 и 1907.

при этом, как в микроскопе, суживается поле зрения. Разностное исчисление теперь предоставлено тем, которые занимаются практическими вычислениями, главным образом астрономам; математики же совсем не изучают его.

На этом я закончу свое изложение исчисления бесконечно-малых и только в заключение опять укажу на особенности, отличающие его от того изложения, которое обыкновенно дается в учебниках.

1. Я иллюстрирую абстрактные рассуждения при помощи наглядных, конкретных чертежей. (Приближенные кривые для рядов Фурье и Тейлора.)

2. Я подчеркиваю связь с соседними областями, например с разностным и интерполяционным исчислениями и даже с философскими исследованиями.

3. Я указываю на историю развития предмета.

4. Я привожу примеры изложения из популярной литературы с целью выяснить разницу между основанными на ней воззрениями публики и воззрениями специалистов-математиков.

Я считаю знакомство с этими вещами особенно важным для будущих учителей. Как только вы вступаете в практическую жизнь, вам приходится столкнуться с ходячими воззрениями, и если вы в них не разобрались раньше, если вы незнакомы с элементом наглядности в математике и не сознаете ее живой связи с соседними областями, если вы, что важнее всего, не знаете исторического развития вашей науки, то вы теряете всякую почву под ногами; вы становитесь на почву самой ортодоксальной математики — и вас тогда не понимают ученики, или же вы признаете себя побежденными, отказываетесь от всего, чему вы научились в университете, и придерживаетесь в преподавании традиционной рутины. Как раз здесь, в области исчисления бесконечно-малых, разрыв между средней и высшей школой особенно велик; я надеюсь, что мое изложение будет содействовать его устранению и что я дал вам для вашей педагогической деятельности полезное орудие.

Теперь я оставляю традиционный анализ и хочу посвятить приложение изложению нескольких теорий новейшей математики, о которых мне уже приходилось упоминать раньше и с которыми, как мне кажется, учитель должен быть немного знаком.

ПРИЛОЖЕНИЕ.

I. ТРАНСЦЕНДЕНТНОСТЬ ЧИСЕЛ e И π

Интерес к числу π возник — в геометрической форме — еще в древности, и тогда уже вполне сознавали разницу между задачей приближенного вычисления его и задачей о точном теоретическом построении и даже обладали некоторыми предпосылками для решения обоих вопросов. Решение первого значительно подвинулось вперед благодаря Архимеду и его способу приближения к кругу при помощи вписанных и описанных многоугольников; второму вопросу скоро дали более точную формулировку: можно ли построить число π при помощи циркуля и линейки? — и стали пробовать найти это построение всевозможными способами, не догадываясь, что причиной постоянных неудач является неразрешимость задачи; все, что сохранилось от этих первых попыток, недавно опубликовал Рудио[1]). Но и теперь „квадратура круга" является одной из самых популярных задач, и множество людей — как я уже говорил раньше — хотят попытать на ней счастье, не зная или не веря, что современная наука давно с ней покончила.

Между тем эти старые вопросы теперь действительно вполне решены. Принципы, на которых основано современное решение этих задач, были найдены в промежуток времени от Ньютона до Эйлера. Для приближенного вычисления π было найдено прекрасное средство в виде бесконечных рядов, которые дают возможность достигнуть точности, удовлетворяющей самым строгим требованиям. Дальше всех в этом направлении пошел англичанин Шарп (Sharp), который нашел 600 десятичных знаков числа π; это вычисление имеет только, так сказать, спортивный интерес, как рекорд, потому что в приложениях никогда не потребуется знать π с такою точностью. Что касается теоретической стороны вопроса, то в этом периоде в исследованиях впервые появляется число e, основание натуральных логарифмов. В это время было открыто удивительное соотношение $e^{i\pi} = -1$ и подготовлено, в виде интегрального исчисления, важное орудие для окончательного решения вопроса.

[1]) Rudio, Der Bericht des Simplicius über die Quadraturen des Antiphon und Hippokrates, Leipzig, 1908. См. также Ф. Рудио, Квадратура круга, Одесса, Mathesis, 1910.

Решительный шаг в этом направлении сделал, как известно, Эрмит (Hermite), доказав в 1874 г. трансцендентность числа e[1]). Он не нашел, однако, также доказательства трансцендентности числа π; это удалось впервые Линдеману (Lindemann) в 1882 г.[2]).

Здесь мы имеем существенное обобщение классической постановки вопроса; там речь шла только о том, чтобы построить π при помощи циркуля и линейки, а это, как мы знаем (стр. 78), аналитически сводится к тому, чтобы представить π как результат нескольких последовательных извлечений корня квадратного из рациональных чисел. Теперь же доказывается не только, что это невозможно, но нечто еще гораздо большее; именно можно показать, что как π, так и e суть числа трансцендентные, т. е. что их вообще нельзя связать с целыми числами никаким алгебраическим соотношением. Другими словами, ни e, ни π не могут быть корнями алгебраического уравнения с целыми рациональными коэфициентами

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n = 0,$$

каковы бы ни были целые числа $a_0, \ldots, a_n$ и показатель n. Самое существенное здесь — это целые рациональные коэфициенты; достаточно было бы, собственно, сказать рациональные коэфициенты, потому что, приводя к общему знаменателю и отбрасывая его, мы всегда можем свести уравнение с рациональными коэфициентами к уравнению с целыми рациональными коэфициентами.

[1]) „Comptes Rendus", т. 77 (1873), стр. 18—24, 74—79, 226—233 285—293. Собр. соч., т. III (1912), стр. 150 и след.

[2]) „Sitzungsberichte der Berliner Akademie", 1882, стр. 679 и „Mathem. Annalen", XX (1882), стр. 213 и сл.

Я теперь приведу доказательство трансцендентности числа e, причем буду пользоваться теми существенными упрощениями, которые сделал в нем Гильберт (Hilbert) в 43 томе „Mathem. Annalen" (1893 г.).

Доказательство трансцендентности числа e.

Нам предстоит доказать, что предположение существования равенства

$$a_0 + a_1 e + a_2 e^2 + \ldots + a_n e^n = 0, \tag{1}$$

где $a_0 \neq 0$ и коэфициенты $a_0, \ldots, a_n$ суть целые числа, ведет к противоречию; это противоречие обнаружится на самых простых свойствах целых чисел. Нам придется ссылаться из теории чисел только на самые элементарные теоремы о делимости, в частности на то, что каждое целое положительное число можно разложить на первоначальных множителей только одним способом, и на то, что существует бесчисленное множество простых чисел.

План нашего доказательства заключается в следующем: мы покажем, как находить очень хорошие рациональные приближенные значения для числа e и его степеней следующего вида:

$$e = \frac{M_1 + \varepsilon_1}{M}, e^2 = \frac{M_2 + \varepsilon_2}{M}, \ldots, e^n = \frac{M_n + \varepsilon_n}{M}, \tag{2}$$

где $M, M_1, M_2, \ldots, M_n$ суть целые числа, а $\frac{\varepsilon_1}{M}, \frac{\varepsilon_2}{M}, \ldots, \frac{\varepsilon_n}{M}$ — чрезвычайно малые дроби. Умножая затем обе части равенства (1) на M, мы придадим ему такой вид:

$$\{a_0 M + a_1 M_1 + a_2 M_2 + \ldots + a_n M_n\} + \{a_1 \varepsilon_1 + a_2 \varepsilon_2 + \ldots + a_n \varepsilon_n\} = 0 \tag{3}$$

Первое слагаемое левой части есть целое число, и мы докажем, что оно н е р а в н о н у л ю; второе слагаемое нам удастся, выбирая достаточно малые значения для чисел $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$, сделать п р а в и л ь н о й д р о б ь ю. Мы придем, таким образом, к противоречию, заключающемуся в том, что сумма целого, отличного от нуля, числа $a_0 M + a_1 M_1 + \ldots + a_n M_n$ и правильной, отличной от единицы, дроби $a_1 \varepsilon_1 + \ldots + a_n \varepsilon_n$ равна нулю; отсюда и будет вытекать невозможность равенства (1).

При этом большую услугу нам окажет следующее предложение: целое число, которое не делится на некоторое определенное число, отлично от нуля (потому что нуль делится на всякое число); именно мы покажем, что числа $M_1, \ldots, M_n$ делятся на некоторое простое число p, а число $a_0 M$ на него, наверное, не делится; таким образом сумма $a_0 M + a_1 M_1 + \ldots + a_n M_n$ не делится на p и, значит, отлична от нуля.

Главным орудием для действительного выполнения того доказательства, идея которого только что намечена, является один определенный интеграл; его впервые в таких рассуждениях стал употреблять Эрмит, и поэтому мы можем назвать его интегралом Эрмита; построить его—значило найти ключ ко всему доказательству. Мы увидим, что значение этого интеграла есть целое число, и он определит наше число M:

$$M = \int_0^\infty \frac{z^{p-1}\{(z-1)(z-2)\ldots(z-n)\}^p e^{-z}}{(p-1)!} dz; \tag{4}$$

здесь n есть степень нашего предполагаемого уравнения (1), а p — некоторое простое число, которое мы определим дальше. При помощи этого интеграла мы найдем также вышеупомянутые приближенные значения (2) для степеней e^ν ($\nu = 1, 2, \ldots, n$); для этого мы разобьем интервал $0 \ldots \infty$ на два интервала при помощи числа ν и положим:

$$M_\nu = e^\nu \int_\nu^\infty \frac{z^{p-1}\{(z-1)\ldots(z-n)\}^p e^{-z}}{(p-1)!} dz, \tag{4a}$$

$$\varepsilon_\nu = e^\nu \int_0^\nu \frac{z^{p-1}\{(z-1)\ldots(z-n)\}^p e^{-z}}{(p-1)!} dz. \tag{4b}$$

Перейдем теперь к самому доказательству.

1. Исходным пунктом является формула, хорошо известная из элементарной теории функции Γ:

$$\int_0^\infty z^{\varrho-1} e^{-z} dz = \Gamma(\varrho).$$

Нам придется применять эту формулу только в предположении, что ϱ есть число целое; в этом случае $\Gamma(\varrho) = (\varrho - 1)!$, и я сейчас это докажу. При помощи интегрирования по частям мы найдем:

$$\int_0^\infty z^{\varrho-1} e^{-z} dz = [-z^{\varrho-1} e^{-z}]_0^\infty + \int_0^\infty (\varrho - 1) z^{\varrho-2} e^{-z} dz =$$

$$= (\varrho - 1) \int_0^\infty z^{\varrho-2} e^{-z} dz.$$

Второй сомножитель правой части представляет собой интеграл того же вида, но только показатель при z на единицу меньше; применяя это преобразование несколько раз, мы дойдем, при ϱ целом, до z^1, а так как $\int_0^\infty e^{-z} dz = 1$, то мы получим окончательно:

$$\int_0^\infty z^{\varrho-1} e^{-z} dz = (\varrho - 1)(\varrho - 2) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1 = (\varrho - 1)! \qquad (5)$$

Этот интеграл есть, таким образом, при целом ϱ, целое число, которое очень быстро возрастает с возрастанием ϱ

Чтобы сделать этот результат геометрически наглядным, изобразим графически ход изменения функции $z^{\varrho-1} e^{-z}$ для различных значений ϱ (фиг. 123); значение интеграла будет равно площади фигуры, заключенной между кривой и осью z и простирающейся до бесконечности. Чем больше ϱ, тем теснее кривая примыкает к оси абсцисс вблизи точки $z = 0$, но зато тем скорее она подымается, начиная от точки $z = 1$; затем она достигает, каково бы ни было ϱ, максимума при $z = \varrho - 1$, причем с возрастанием ϱ этот максимум увеличивается и вместе с тем передвигается вправо; начиная от этой точки получает преобладающее значение множитель e^{-z}, кривая начинает падать и, наконец, опять очень близко подходит к оси абсцисс. Теперь понятно, что площадь — наш интеграл — всегда остается конечной, но с возрастанием ϱ сильно возрастает.

2. Пользуясь доказанной формулой, мы теперь легко найдем значение интеграла Эрмита (4). Если мы раскроем

скобки и расположим подинтегральную функцию по нисходящим степеням z, пользуясь разложением степени многочлена в строку:

$$\{(z-1)(z-2)\ldots(z-n)\}^p = \{z^n - \ldots + (-1)^n n!\}^p =$$
$$= z^{np} - \ldots + (-1)^n (n!)^p \text{ [1]}$$

(я выписываю здесь только высший и низший, т. е. свободный от z, член), то этот интеграл примет вид:

$$M = \frac{(-1)^n (n!)^p}{(p-1)!} \int_0^\infty z^{p-1} e^{-z} dz + \sum_{\varrho = p+1, p+2, \ldots, p+np} \frac{C_\varrho}{(p-1)!} \int_0^\infty z^{\varrho-1} e^{-z} dz;$$

Фиг. 123.

C_ϱ здесь постоянные и притом целые числа, которые получаются при указанном разложении степени многочлена. Применяя формулу (5) к каждому из полученных интегралов, мы получим:

$$M = (-1)^n (n!)^p + \sum_{\varrho = p+1, \ldots, p+np} C_\varrho \frac{(\varrho - 1)!}{(p-1)!}.$$

Все ϱ под знаком суммы больше p, и, значит, отношения $\frac{(\varrho-1)!}{(p-1)!}$ суть целые числа, содержащие, кроме того, множитель p; если его вынести за скобку, то мы получим:

$$M = (-1)^n (n!)^p + p\{C_{p+1} + C_{p+2}(p+1) + C_{p+3}(p+1)(p+2) + \ldots\}.$$

Отсюда мы видим, что M делится или не делится на p в зависимости от того, делится или не делится на p первое слагаемое $(-1)^n (n!)^p$. Но так как p есть число простое, то это слагаемое, наверное, не будет делиться на p, если p не

[1] Автор пишет $(-1)^n$ вместо $(-1)^{np}$, так как p — число простое и больше 2, следовательно, нечетное. *Ред.*

входит в состав ни одного из его сомножителей $1, 2, \ldots, n$; а это, наверное, случится, если $p > n$. Этому условию удовлетворяет бесчисленное множество простых чисел; выбрав одно из них, мы достигнем того, что $(-1)^n (n!)^p$ и, значит, M, наверное, не будет делиться на p.

Так как, по предположению, $a_0 \neq 0$, то нам легко сделать так, чтобы и a_0 не делилось на p; для этого достаточно только выбрать p большим, чем a_0, что, как следует из сказанного выше, конечно, возможно. Но тогда произведение $a_0 M$ также не делится на p, и мы достигли, таким образом, нашей первой цели.

3. Исследуем теперь числа M_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$, определенные равенствами (4a) (стр. 355). Введем множитель e^ν под знак интеграла и введем новую переменную $\zeta = z - \nu$, принимающую значения от 0 до ∞, когда z изменяется от ν до ∞; тогда мы получим:

$$M_\nu = \int_0^\infty \frac{(\zeta+\nu)^{p-1}\{(\zeta+\nu-1)(\zeta+\nu-2)\ldots\zeta\ldots(\zeta+\nu-n)\}^p e^{-\zeta}}{(p-1)!}\,d\zeta.$$

Этот интеграл того же вида, что и раньше рассмотренный интеграл M, и мы можем здесь применить аналогичные преобразования. Раскрыв скобки в числителе подинтегральной функции, мы получим агрегат степеней ζ с целыми коэфициентами, причем низшая из этих степеней есть ζ^p. Интеграл числителя представится теперь в виде суммы интегралов:

$$\int_0^\infty \zeta^p e^{-\zeta}\,d\zeta,\ \int_0^\infty \zeta^{p+1} e^{-\zeta}\,d\zeta, \ldots, \int_0^\infty \zeta^{(n+1)\,p-1} e^{-\zeta}\,d\zeta,$$

помноженных на целые числа; а так как эти последние интегралы имеют, согласно равенствам (5), соответственно значения $p!, (p+1)!, \ldots$, то эту сумму можно представить в виде числа $p!$, умноженного на некоторое целое число A_ν; таким образом для каждого из рассматриваемых интегралов мы имеем:

$$M_\nu = \frac{p!A_\nu}{(p-1)!} = p \cdot A_\nu \ (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

т. е. все они суть целые числа, кратные p.

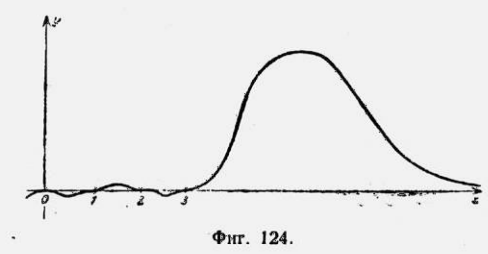
Если мы сопоставим это с доказанным в п. 2, то мы увидим, что можно применить указанное выше (стр. 355) предложение и сказать: $a_0 M + a_1 M_1 + \ldots + a_n M_n$, наверное, не делится на p и, следовательно, отлично от нуля.

4. Вторая часть доказательства относится к сумме $a_1 \varepsilon_1 + \ldots + a_n \varepsilon_n$, где, согласно равенству (4b) (стр. 355),

$$\varepsilon_\nu = \int_0^\nu \frac{z^{p-1}\{(z-1)(z-2)\ldots(z-n)\}^p e^{-z+\nu}}{(p-1)!}\,dz,$$

и нам нужно доказать, что, давая p надлежащие значения, можно сделать эти ε_ν сколь угодно малыми; при этом мы воспользуемся тем, что мы можем сделать p сколь угодно большим, так как те условия, которым мы пока подчинили простое число p $(p > n, p > a_0)$, могут быть удовлетворены произвольно большими простыми числами.

Изобразим прежде всего геометрически ход изменения подинтегральной функции (фиг. 124). При $z = 0$ кривая



Фиг. 124.

касается оси z, при $z = 1, 2, \ldots, n$ она касается оси z и в то же время пересекает ее (так как p число нечетное). Мы сейчас увидим, что под влиянием знаменателя $(p-1)!$ кривая во всем промежутке $(0, n)$ не подымается высоко над осью z, если только взять p достаточно большим; таким образом очевидно, что интеграл ε_ν будет очень мал. Вне этого промежутка при $z > n$ подинтегральная функция быстро возрастает и затем асимптотически приближается к оси z-ов, как рассмотренная выше функция $z^{\rho-1} e^{-z}$ [для $\rho = (n+1)p$]; это объясняет, как получаются эти

быстро растущие с возрастанием p значения интеграла M, взятого по всему промежутку от 0 до ∞.

Для того чтобы действительно оценить предел интегралов ε_ν, оказывается достаточным применить следующий грубый прием. Обозначим через G и g_ν наибольшие абсолютные значения функции $z(z-1)\ldots(z-n)$ и функции $(z-1)(z-2)\ldots(z-n)e^{-z+\nu}$ в промежутке $(0, n)$, так что

$$\left.\begin{array}{l} |z(z-1)\ldots(z-n)| \leqslant G \\ |(z-1)(z-2)\ldots(z-n)\,e^{-z+\nu}| \leqslant g_\nu \end{array}\right\} \text{ для } 0 \leqslant z \leqslant n.$$

Так как абсолютная величина интеграла никогда не превышает интеграла абсолютной величины подинтегральной функции, то для каждого ε_ν мы имеем:

$$|\varepsilon_\nu| \leqslant \int\limits_0^\nu \frac{G^{p-1} g_\nu}{(p-1)!}\,dz = \frac{G^{p-1} g_\nu\,\nu}{(p-1)!}. \qquad (6)$$

Числа G, g_ν, ν не зависят от p, а стоящий в знаменателе факультет $(p-1)!$ возрастает, как известно, быстрее, чем степень G^{p-1}, или, точнее, при достаточно большом p дробь $\frac{G^{p-1}}{(p-1)!}$ делается меньше какого угодно наперед заданного числа, как бы мало оно ни было. Равенство (6) показывает, таким образом, что, принимая за p достаточно большое число, мы можем сделать сколь угодно малым каждое из чисел ε_ν.

Отсюда непосредственно следует, что мы можем сделать сколь угодно малой сумму $a_1\varepsilon_1 + \ldots + a_n\varepsilon_n$, состоящую из n членов; в самом деле,

$$|a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \ldots + a_n\varepsilon_n| \leqslant |a_1|\cdot|\varepsilon_1| + |a_2|\cdot|\varepsilon_2| + \ldots + |a_n|\cdot|\varepsilon_n|$$

и, согласно равенству (6),

$$\leqslant (|a_1|\cdot 1g_1 + |a_2|\cdot 2g_2 + \ldots + |a_n|\cdot ng_n)\cdot\frac{G^{p-1}}{(p-1)!};$$

а так как множитель, заключенный в скобки, имеет постоянное, не зависящее от p значение, то благодаря множителю $\frac{G^{p-1}}{(p-1)!}$ мы можем всю правую часть, а следовательно, и левую, т. е. $|a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \ldots + a_n\varepsilon_n|$, сделать как угодно малой, — в частности, меньше единицы.

Но это приводит нас к тому противоречию с равенством (3):

$$(a_0 M + a_1 M_1 + \ldots + a_n M_n) + (a_1\varepsilon_1 + \ldots + a_n\varepsilon_n) = 0,$$

которое мы выше имели в виду (стр. 354); оно состоит в том, что целое число, отличное от нуля, по прибавлении к нему правильной дроби должно обратиться в нуль. Поэтому последнее равенство не может иметь места, и таким образом доказана трансцендентность числа e.

Теперь мы перейдем к доказательству трансцендентности числа π.

Доказательство трансцендентности числа π

Это доказательство хотя и сложнее предыдущего доказательства, но, в сущности, очень просто. Надо только — и в этом заключается искусство математического творчества — подойти к вопросу с надлежащего конца.

Линдеман (Lindemann) поставил вопрос следующим образом. До сих пор было установлено, что равенство $\sum\limits_{\nu=1,\ldots,n} a_\nu e^\nu = 0$ не может иметь места, если a_ν и ν суть обыкновенные целые рациональные числа; спрашивается, нельзя ли доказать, что это равенство не может иметь места и при алгебраических значениях коэфициентов a_ν и показателя ν. Линдеману действительно удалось это показать, а именно общая теорема Линдемана о показательной функции гласит так: равенство $\sum\limits_{\nu=1,\ldots,n} a_\nu e^{b_\nu} = 0$ не может иметь места, если коэфициенты a_ν представляют любые, а b_ν различные между собой алгебраические числа. Трансцендентность π является тогда непосредственным следствием этой теоремы; действительно, как известно, имеет место тождество $1 + e^{i\pi} = 0$, поэтому, если бы π было алгебраическим числом, то и $i\pi$ было бы таким же числом и существование последнего тождества противоречило бы упомянутой теореме Линдемана.

Я хочу подробно изложить доказательство только одного частного случая теоремы Линдемана, который уже

заключает в себе и доказательство трансцендентности числа π. При этом я буду следовать снова, по существу дела, доказательству Гильберта („Mathem. Ann"., Bd. 43), которое существенно проще, чем доказательство Линдемана, и представляет собой точное обобщение предыдущих рассуждений о числе e.

Исходным пунктом служит соотношение:

$$1 + e^{i\pi} = 0. \qquad (1)$$

Если π удовлетворяет какому-нибудь алгебраическому уравнению с целыми рациональными коэфициентами, то $i\pi$ тоже удовлетворяет подобному же уравнению; обозначим через $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ все корни этого последнего уравнения, считая в том числе и корень $i\pi$. Тождество (1) показывает, что должно иметь место соотношение:

$$(1 + e^{\alpha_1})(1 + e^{\alpha_2}) \ldots (1 + e^{\alpha_n}) = 0.$$

Выполняя умножение, получаем:

$$1 + (e^{\alpha_1} + e^{\alpha_2} + \ldots + e^{\alpha_n}) + (e^{\alpha_1+\alpha_2} + e^{\alpha_1+\alpha_3} + \ldots + e^{\alpha_{n-1}+\alpha_n}) + \ldots$$
$$\ldots + (e^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}) = 0. \qquad (2)$$

Может случиться, что некоторые из входящих сюда показателей равны нулю; но во всяком случае, если даже это и имеет место, левая часть будет содержать положительное слагаемое 1, которое вместе со слагаемыми вида e^0 даст одно целое положительное число a_0, наверное, отличное от нуля. Остальные показатели, не равные нулю, обозначим через $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_N$, так что равенство (2) можно написать в таком виде:

$$a_0 + e^{\beta_1} + e^{\beta_2} + \ldots + e^{\beta_N} = 0 \quad (a_0 \neq 0). \qquad (3)$$

С другой стороны, показатели $\beta_1, \ldots, \beta_N$ служат корнями некоторого уравнения с целыми коэфициентами. В самом деле, из уравнения с целыми коэфициентами, которому удовлетворяют числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, можно, как известно, вывести такое же уравнение, корнями которого являются все двучленные суммы $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_3, \ldots$; точно так же можно вывести подобные уравнения для трехчленных сумм $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4, \ldots$; наконец, сумма $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$ равна рациональному числу и, следовательно, удовлетворяет линейному целочисленному урав-

нению. Перемножая все эти уравнения, мы получим снова уравнение с целыми рациональными коэфициентами, некоторые корни которого могут равняться нулю, а прочие равны $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_N$. Деля уравнение на неизвестное в степени, равной числу первых корней, получим для N величин β уравнение с целыми коэфициентами как раз N-й степени и с постоянным членом, отличным от нуля:

$$b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots + b_N z^N = 0, \qquad (4)$$

где b_0 и $b_N \neq 0$.

То, что мы имели в виду доказать и что, как мы говорили выше, обнимает, между прочим, и трансцендентность числа π, составляет следующий частный случай теоремы Линдемана: равенство вида (3) с целым и отличным от нуля коэфициентом a_0 не может иметь места, если числа $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_N$ удовлетворяют уравнению N-й степени (4) с целыми рациональными коэфициентами.

Доказательство этой теоремы можно расчленить на такие же части, как и предыдущее доказательство трансцендентности числа e. Подобно тому как там нам удавалось дать особенно хорошие приближения целых степеней $e^1, e^2, \ldots, e^n$ при помощи рациональных чисел, так и здесь надо будет исследовать вопрос о возможно лучшем приближенном выражении степеней числа e, входящих в равенство (3). Мы положим, сохраняя прежние обозначения:

$$e^{\beta_1} = \frac{M_1 + \varepsilon_1}{M}, \quad e^{\beta_2} = \frac{M_2 + \varepsilon_2}{M}, \ldots, \quad e^{\beta_N} = \frac{M_N + \varepsilon_N}{M}; \qquad (5)$$

здесь знаменатель M тоже равен некоторому обыкновенному целому числу, а $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N$ означают очень малые дроби, тогда как $M_1, \ldots, M_N$ представляют собой не целые рациональные, а целые алгебраические числа; в этом именно заключается усложнение по сравнению с прежним доказательством. Но сумма всех чисел $M_1, \ldots, M_N$ и в данном случае равна целому рациональному числу, а именно можно распорядиться так, что первое слагаемое равенства:

$$\{a_0 M + M_1 + M_2 + \ldots + M_N\} + \{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_N\} = 0, \qquad (6)$$

в которое, в силу соотношений (5), переходит равенство (3) по умножении его на M, будет представлять собой целое рациональное число, отличное от нуля, тогда как абсолютная величина второго слагаемого будет, во всяком случае, меньше единицы. Но это и есть как раз то противоречие, которым мы воспользовались выше; таким образом будет обнаружена невозможность равенств (6) и (3), и наше доказательство будет выполнено. В частности, мы снова покажем, что сумма $M_1 + M_2 + \ldots + M_N$ делится на некоторое простое число p, а произведение $a_0 \cdot M$ не делится на него, из чего, аналогично прежнему, будет вытекать, что первое слагаемое в равенстве (6) отлично от нуля. Затем мы покажем, что число p можно выбрать сколь угодно большим и притом так, чтобы второе слагаемое в равенстве (6) было сколь угодно мало.

1. Прежде всего задача заключается в том, чтобы выразить M посредством подходящего обобщения интеграла Эрмита. Это обобщение основано на том замечании, что корнями множителя $(z-1)\ldots(z-n)$ интеграла Эрмита являются как раз показатели степеней e в предполагаемом алгебраическом уравнении. Поэтому теперь мы заменим его произведением, составленным с помощью показателей равенства (3), т. е. с помощью корней уравнения (4):

$$(z-\beta_1)(z-\beta_2)\ldots(z-\beta_N)=\frac{1}{b_N}\{b_0+b_1z+\ldots+b_Nz^N\}. \quad (7)$$

Но существенным оказывается здесь то обстоятельство, что мы присоединяем еще надлежащую степень числа b_N в качестве множителя, что раньше было излишне, так как произведение $(z-1)\ldots(z-n)$ и без того имело целые коэфициенты. Итак, в конце концов мы полагаем:

$$M=\int_0^{\infty}\frac{e^{-z}z^{p-1}dz}{(p-1)!}\{b_0+b_1z+\ldots+b_Nz^N\}^p\, b_N^{(N-1)p-1}.$$

2. Если развернуть, как и выше, подинтегральное выражение M по возрастающим степеням z, то наинизший член, содержащий z^{p-1}, даст:

$$\int_0^{\infty}\frac{e^{-z}z^{p-1}dz}{(p-1)!}\, b_0^p\, b_N^{(N-1)p-1}=b_0^p\, b_N^{(N-1)p-1},$$

где интеграл выражен по формуле Γ, которую мы постоянно применяли выше (стр. 335). Все же дальнейшие слагаемые содержат под знаком интеграла z^p или еще высшие степени z; поэтому в них входит множителем $\frac{p!}{(p-1)!}$, умноженное на целые числа; следовательно, все они делятся на p. Поэтому само M представляет собою целое число, не делящееся на p, если первое слагаемое $b_0^p\, b_N^{(N-1)p-1}$ не делится на p, т. е. если простое число p не делит ни b_0, ни b_N. Так как $b_0 \neq 0, b_N \neq 0$, то p сообразно этому условию можно определить проще всего, если принять, что

$$p > b_0,\ p > b_N.$$

Так как $a_0 \neq 0$, то можно сразу же достигнуть того, что $a_0 \cdot M$ не будет делиться на p; для этого достаточно подчинить p еще одному условию:

$$p > a_0.$$

Всем этим условиям можно удовлетворить бесконечным числом способов, так как число простых чисел бесконечно велико.

3. Теперь мы должны перейти к вопросу о построении чисел M_ν и ε_ν. Здесь дело обстоит несколько иначе, чем раньше, так как место целых чисел ν занимают числа β_ν, которые могут быть комплексными, и одно из них должно даже непременно равняться $i\pi$. Поэтому, если мы хотим предпринять разложение интеграла M, подобное прежнему, то надо сперва установить путь интегрирования в комплексной плоскости. К счастью, выражение, стоящее под знаком нашего интеграла, представляет собой повсюду в конечном расстоянии однозначную правильную аналитическую функцию переменной интегрирования z, для которой только значение $z=\infty$ является особенной (и именно, существенно особенной) точкой. Вместо того чтобы интегрировать от 0 до ∞ вдоль полуоси вещественных положительных чисел, мы можем воспользоваться каким-нибудь другим путем интегрирования, идущим от 0 в ∞, если только он, в конце концов, уходит в бесконечность, приближаясь, по крайней мере, асимптотически к какой-нибудь параллели к упомянутой полуоси; это необходимо для того, чтобы интеграл вообще имел смысл.

Отметим мысленно N точек $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N$ в комплексной плоскости и заметим, что мы получим число M, если будем интегрировать сперва по прямой от нуля до одной из этих точек β_ν, а затем от β_ν вдоль параллели к вещественной оси до ∞ (фиг. 125). Соответственно этому пути интегрирования можно разложить M на две характеристические части: прямолинейный путь от 0 до β_ν дает[1]) слагаемое ε_ν, становящееся бесконечно малым при возрастании p, а параллель от β_ν до ∞ дает[1]) целое алгебраическое число M_ν:

Фиг. 125.

$$\varepsilon_\nu = e^{\beta_\nu} \int_0^{\beta_\nu} \frac{e^{-z} z^{p-1} dz}{(p-1)!} (b_0 + b_1 z + \dots + b_N z^N)^p \, b_N^{(N-1)p-1}, \quad (8a)$$

$$M_\nu = e^{\beta_\nu} \int_{\beta_\nu}^{\infty} \frac{e^{-z} z^{p-1} dz}{(p-1)!} (b_0 + b_1 z + \dots + b_N z^N)^p \, b_N^{(N-1)p-1}. \quad (8b)$$

Эти выражения действительно удовлетворяют равенствам (5). То обстоятельство, что мы пользуемся при этом именно прямолинейными путями, объясняется исключительно соображениями удобства; любой криволинейный путь от 0 до β_ν дал бы, конечно, то же самое значение для ε_ν; но только прямолинейный путь дает возможность проще сделать оценку этой величины. Точно так же мы могли бы вместо горизонтали от β_ν до ∞ воспользоваться любой кривой, которая асимптотически приближается к какой-нибудь горизонтали, но только это создало бы ненужные трудности.

4. Я начну с оценки величины ε_ν, которая не представляет ничего нового по сравнению с предыдущим; нужно только воспользоваться тем обстоятельством, что модуль комплексного интеграла никогда не превосходит произведения наибольшего значения модуля подинтегрального

[1]) По умножении на e^{β_ν}. *Ред.*

выражения на длину пути интегрирования, которая в данном случае равна β_ν. Таким образом мы получаем для верхней границы величин ε_ν выражение $\frac{G^{p-1}}{(p-1)!}$ (где G означает максимум выражения $|z(b_0 + b_1 z + \dots + b_N z^N) b_N^{N-1}|$ в некоторой области, содержащей все точки β_ν), умноженное на множителей, не зависящих от p. Из этого мы заключаем, подобно предыдущему, что, увеличивая p, можно сделать абсолютную величину каждого ε_ν, а следовательно, и суммы $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_N$ сколь угодно малой, в частности, меньше единицы.

5. В существенно новых соображениях оказывается надобность лишь при исследовании величин M_ν; впрочем, это будут прямые обобщения прежних рассуждений, причем придется лишь принять во внимание то обстоятельство, что место рациональных чисел займут теперь алгебраические числа. Рассмотрим всю сумму:

$$\sum_{\nu=1}^{N} M_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} e^{\beta_\nu} \int_{\beta_\nu}^{\infty} \frac{e^{-z} z^{p-1} dz}{(p-1)!} \{b_0 + b_1 z + \dots + b_N z^N\}^p \, b_N^{(N-1)p-1}.$$

Если мы здесь в каждом слагаемом в силу равенства (7) (стр. 364) заменим многочлен, содержащий z, через произведение $(z-\beta_1)\dots(z-\beta_N)$ и введем новую переменную интегрирования $\zeta = z - \beta_\nu$, которая, соответственно принятому для z пути интегрирования, пробегает все вещественные значения от 0 до ∞, то для суммы получится такое выражение:

$$\sum_{\nu=1}^{N} M_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\zeta} d\zeta}{(p-1)!} (\zeta + \beta_\nu)^{p-1} (\zeta + \beta_\nu - \beta_1)^p \dots$$

$$\dots \zeta^p \dots (\zeta + \beta_\nu - \beta_N)^p \, b_N^{Np-1} = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\zeta} d\zeta}{(p-1)!} \zeta^p \, \Phi(\zeta),$$

где

$$\Phi(\zeta) = \sum_{\nu=1}^{N} b_N^{Np-1} (\zeta + \beta_\nu)^{p-1} (\zeta + \beta_\nu - \beta_1)^p \dots$$

$$\dots (\zeta + \beta_\nu - \beta_{\nu-1})^p (\zeta + \beta_\nu - \beta_{\nu+1})^p \dots (\zeta + \beta_\nu - \beta_N)^p.$$

Эта сумма $\Phi(\zeta)$, как и каждое из ее N слагаемых, представляет собою полином относительно ζ, причем в каждом из слагаемых, очевидно, одна из N величин $\beta_1, \ldots, \beta_N$ играет исключительную роль. Но в самой сумме $\Phi(\zeta)$, а вместе с тем и во всех ее коэфициентах при ζ, все эти N величин играют одинаковую роль; другими словами, каждый из этих коэфициентов представляет симметрическую функцию величин $\beta_1, \ldots, \beta_N$. Выполняя возведение в степень в отдельных множителях по обобщенной теореме бинома, можно убедиться в том, что это — целые рациональные функции от $\beta_1, \ldots, \beta_N$ с целыми рациональными численными коэфициентами. Но, по известной теореме алгебры, рациональные симметрические функции с рациональными коэфициентами от всех корней уравнения с рациональными численными коэфициентами представляют всегда рациональные числа; а так как $\beta_1, \ldots, \beta_N$ суть все корни уравнения (4), то коэфициенты нашего многочлена $\Phi(\zeta)$ действительно рациональны. Но нам нужно иметь целые рациональные числа; их мы получим с помощью степени числа b_N, входящей множителем в подинтегральное выражение. Мы можем распределить ее по всем входящим в это выражение линейным множителям и написать сумму в таком виде:

$$\Phi(\zeta) = \sum_{\nu=1}^{N} (b_N\zeta + b_N\beta_\nu)^{p-1} \cdot (b_N\zeta + b_N\beta_\nu - b_N\beta_1)^p \ldots$$
$$\ldots (b_N\zeta + b_N\beta_\nu - b_N\beta_{\nu-1})^p \cdot (b_N\zeta + b_N\beta_\nu - b_N\beta_{\nu+1})^p \ldots$$
$$\ldots (b_N\zeta + b_N\beta_\nu - b_N\beta_N)^p. \tag{9}$$

Как и раньше, коэфициенты многочлена относительно ζ, изображаемого этой суммой, представляют целые рациональные симметрические функции с целыми рациональными коэфициентами от произведений $b_N\beta_1, b_N\beta_2, \ldots, b_N\beta_N$. Но эти N произведений являются корнями того уравнения, которое можно получить из равенства (4), если заменить в нем z через $\frac{z}{b_N}$:

$$b_0 + b_1 \frac{z}{b_N} + \ldots + b_{N-1}\left(\frac{z}{b_N}\right)^{N-1} + b_N\left(\frac{z}{b_N}\right)^N = 0;$$

умножая это равенство на b_N^{N-1}, получим:

$$b_0 b_N^{N-1} + b_1 b_N^{N-2} z + \ldots + b_{N-2} b_N z^{N-2} + b_{N-1} z^{N-1} + z^N = 0,$$

т. е. уравнение с одними только целыми коэфициентами и коэфициентом 1 при высшем члене.

Такие алгебраические числа, которые удовлетворяют целочисленному уравнению с коэфициентом 1 при старшем члене, называют *целыми алгебраическими числами*; теперь мы можем следующим образом формулировать предыдущую теорему: *целые рациональные симметрические функции, с целыми коэфициентами, от всех корней целочисленного уравнения с старшим коэфициентом 1 — другими словами от целых алгебраических чисел — сами представляют целые рациональные числа*. Эту теорему вы тоже найдете в учебниках алгебры; если она, может быть, не везде окажется выраженной в столь точной форме, то все же вы легко убедитесь в ее справедливости, если проследите за доказательством.

Но коэфициенты многочлена, стоящего в подинтегральном выражении (9), действительно удовлетворяют условиям этой теоремы; поэтому они должны быть целыми рациональными числами; мы обозначим их через $A_0, A_1 \ldots A_{Np-1}$:

$$\sum_{\nu=1}^{N} M_\nu = \int_0^\infty \frac{e^{-\zeta}\zeta^p d\zeta}{(p-1)!}(A_0 + A_1\zeta + \ldots + A_{Np-1}\zeta^{Np-1}).$$

Теперь мы, в сущности, пришли к нашей цели. В самом деле, если выполнить интегрирование по нашей Γ-формуле (стр. 355), то получатся множители $p!, (p+1)!, (p+2)!, \ldots$, так как каждый член содержит множитель ζ в степени высшей, чем p; вследствие этого по разделении на $(p-1)!$ во всех членах, наверно, останется еще множитель p, а другие множители представляют собой целые числа (а именно, числа $A_0, A_1, A_2, \ldots$). Поэтому $\sum_{\nu=1}^{N} M_\nu$ представляет целое чис-

ло, которое, наверное, делится на p. Но, с другой стороны, мы показали (стр. 364), что a_0M не делится на p; поэтому сумма $a_0M + \sum_{\nu=1}^{N} M_\nu$ непременно представляет целое число, не делящееся на p и, следовательно, во всяком случае, не равное нулю. Ввиду этого равенство (6):

$$\left\{a_0M + \sum_{\nu=1}^{N} M_\nu\right\} + \left\{\sum_{\nu=1}^{N} \varepsilon_\nu\right\} = 0$$

тоже не может иметь места, ибо отличное от нуля число по сложении его с числом $\sum_{\nu=1}^{N} \varepsilon_\nu$, которое по абсолютной величине, наверное, меньше единицы (стр. 366), не может дать нуль. Но этим доказана теорема Линдемана в ее упомянутом выше (стр. 363) частном случае и вместе с нею и предложение о трансцендентности числа π, которое в ней содержится.

Я хочу отметить еще один интересный частный случай общей теоремы Линдемана, состоящий в том, что в уравнении $e^\beta = b$ числа b и β не могут быть одновременно алгебраическими, если не считать тривиального исключительного случая, когда $\beta = 0$, $b = 1$. Другими словами, показательная функция от алгебраического аргумента β и натуральный логарифм алгебраического числа b всегда, кроме упомянутого единственного исключения, представляют трансцендентные числа. Из этого при $\beta = 1$ вытекает трансцендентность e и при $b = -1$ трансцендентность π (так как $e^{i\pi} = -1$). Доказательство этой теоремы представляет точное обобщение последних рассуждений, причем исходят не от $1 + e^a$, а от $b - e^\beta$, надо только принять во внимание, наряду со всеми корнями алгебраического уравнения для β, также все корни уравнения для b, чтобы притти к равенству, подобному равенству (3), вследствие этого приходится употреблять большее число обозначений, так

что доказательство становится более запутанным. Но в существенно новых идеях надобности не представляется. Вполне аналогично можно провести доказательство общей теоремы Линдемана.

Я не стану входить в рассмотрение этих доказательств, но зато я хотел бы сделать для вас возможно более наглядным значение последней теоремы о показательной функции. Представьте себе, что на оси абсцисс отмечены все точки с алгебраическими абсциссами x (фиг. 126). Как мы знаем, уже одни рациональные и подавно все алгебраи-

0 x

Фиг. 126.

ческие числа образуют на оси абсцисс всюду плотное множество и на первый взгляд кажется, что алгебраические числа уже, во всяком случае, исчерпывают все вещественные точки x. И вот тут-то наша теорема говорит, что это не так, но что на оси x-ов между алгебраическими числами помещается еще бесконечно много других трансцендентных чисел; бесконечное число примеров таких чисел представляют числа e^x и $\lg x$, где x есть алгебраическое число, а также всякая алгебраическая функция этих трансцендентных чисел.

Все это станет, может быть, еще более ясным, если мы напишем наше уравнение в таком виде:

$$y = e^x$$

и изобразим его в плоскости xy в виде кривой (фиг. 127). Если отметить на оси x-ов и на оси y-ов все алгебраические числа и затем рассматривать все точки (x, y), у которых обе координаты суть алгебраические числа, то вся плоскость xy окажется покрытой всюду плотным множеством этих „алгебраических" точек. Но, несмотря на такое сгущенное расположение алгебраических точек, показательная кривая $y = e^x$ не содержит ни одной алгебраической точки, кроме точки $x = 0$, $y = 1$, так как во всех других случаях, согласно нашей теореме, в равенстве $y = e^x$, по крайней мере, одна из величин x, y имеет транс-

цендентное значение. Это свойство показательной кривой представляет, конечно, в высшей степени удивительное явление!

Эти теоремы, обнаруживающие существование огромного количества чисел, которые не только не рациональны, но и, вообще, не могут быть составлены из целых чисел при помощи алгебраических действий, имеют для наших представлений о числовом континууме громадное значение. Как бы отпраздновал Пифагор такое открытие, если открытие иррациональных чисел казалось ему достойным целой гекатомбы!

Удивительно только то, как мало внимания и понимания встречают, вообще, эти вопросы о трансцендентности, хотя они оказываются столь простыми, если их хоть раз хорошенько продумать. На экзаменах постоянно приходится наблюдать, что кандидат не в состоянии даже объяснить термин „трансцендентность"; большинство просто говорит, что трансцендентное число не удовлетворяет никакому алгебраическому уравнению, а между тем, ведь это совсем неверно, как показывает пример: $x - e = 0$. Забывают о самом главном, — о том, что коэфициенты уравнения должны быть рациональными числами.

Фиг. 127.

Если вы еще раз продумаете наши доказательства трансцендентности, то эти простые элементарные умозаключения должны будут представиться вам как нечто целое, в удобопонятном виде и будут вами усвоены надолго. Запомнить надо только интеграл Эрмита; тогда все остальное вытекает само собой вполне естественным образом.

Я хотел бы еще в особенности подчеркнуть то обстоятельство, что в этих доказательствах мы спокойно пользовались, согласно всем нашим основным идеям, понятием об интеграле, — говоря геометрически, понятием о площади, — как понятием, совершенно в сущности элементарным, и я полагаю, что это существенным образом способствовало наглядности доказательства. Сравните, например, изложение в т. I Вебера-Вельштейна или же в

моем собственном небольшом сочинении „Лекции по избранным вопросам элементарной геометрии" [1]), где в духе старых учебников избегается употребление знака интеграла и вместо него прибегают к вычислению рядов, — и вы согласитесь с тем, что там ход доказательства далеко не столь нагляден и не столь легок для понимания.

Последние рассуждения о распределении алгебраических чисел среди вещественных чисел приводят нас естественным образом ко второй современной дисциплине, на которую я уже не раз указывал в течение этих лекций и которую я хочу теперь изложить более подробно. Я имею в виду учение о множествах.

II. УЧЕНИЕ О МНОЖЕСТВАХ

Работы основателя этой теории, Георга Кантора (Cantor) в Галле, исходят как раз от исследований вопроса о существовании трансцендентных чисел [2]) и дают этому факту совершенно иное освещение.

Если тот краткий обзор учения о множествах, который я намерен вам предложить, имеет какую-либо особенность, то последняя заключается в том, что на первый план выступает изучение конкретных примеров вместо отвлеченных рассуждений совершенно общего характера, благодаря которым учение о множествах часто принимает весьма трудную для понимания форму, отпугивающую читателя.

1. Мощность множества.

Соответственно сказанному, я прежде всего напомню вам, что в течение этих лекций мы не раз имели дело с различными характерными собраниями чисел, которые мы теперь будем называть **числовыми совокупностями** или **множествами**. В области вещественных чисел, мы имели дело с такими множествами:

1) **целые положительные числа**,
2) **рациональные числа**,
3) **алгебраические числа**,
4) **все вещественные числа**.

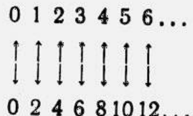
[1]) „Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie"; см. цитату на стр. 85.

[2]) „Journal für die reine und angewandte Mathematik" (1873), Bd. 77.

Каждое из этих множеств содержит бесконечно много чисел. И вот прежде всего возникает такой вопрос: нельзя ли, несмотря на это обстоятельство, в некотором определенном смысле *сравнить между собой эти множества по величине или объему*: другими словами, нельзя ли *„бесконечность“* одного *множества считать большей, равной или меньшей, чем „бесконечность“ другого множества*? Великой заслугой Кантора является то обстоятельство, что он установил точные понятия и с помощью их разъяснил и разрешил этот, на первый взгляд, совершенно неопределенный вопрос. А именно здесь на первом плане стоит понятие о *„мощности“* или о *количественном числе*: два множества имеют *„одинаковую мощность“* (эквивалентны), если между их элементами можно установить взаимнооднозначное соответствие, т. е. если одно множество можно так отобразить в другом, что каждому элементу первого взаимно однозначно соответствует некоторый элемент второго. Если же подобное отображение невозможно, то множества имеют *различную мощность*; при этом оказывается, что в последнем случае, каким бы образом мы ни пытались привести в сопряжение элементы обоих множеств, всегда останутся лишние элементы и притом всегда от одного и того же множества, которое имеет поэтому „бóльшую мощность“.

Все это мы поясним теперь на четырех упомянутых выше примерах. Может быть, на первый взгляд кажется вероятным, что мощность множества натуральных чисел меньше, чем мощность всех рациональных чисел, а эта последняя, в свою очередь, меньше мощности всех алгебраических чисел, и что, наконец, последняя меньше мощности всех вещественных чисел, ибо каждое из этих множеств возникает из предшествующего путем присоединения новых элементов. Но в действительности такое заключение лишено всякого основания: хотя всякое конечное множество всегда имеет большую мощность, чем любая его часть, но этого предложения ни в каком случае нельзя переносить на бесконечные множества. В конце концов, такие уклонения не так уж удивительны, если иметь в виду, что здесь мы переходим в совершенно новую область.

Убедимся же сперва на совсем простом примере в том, что часть бесконечного множества действительно может иметь равную с ним мощность; для этого мы сравним множество всех натуральных чисел с множеством всех четных чисел:



Сопряжение, указываемое двойными стрелками, очевидно, обладает описанными выше свойствами, а именно всякому элементу одного множества соответствует один и только один элемент другого множества. Следовательно, *согласно определению Кантора, множество натуральных чисел имеет такую же мощность, как и его часть, составляющая множество четных чисел.*

Итак, исследование мощностей наших четырех множеств не так уж просто. Тем поразительнее тот простой результат, который составляет содержание замечательного открытия Кантора, сделанного им в 1873 г.: *три множества — всех натуральных, всех рациональных и всех алгебраических чисел — имеют одинаковую мощность, а множество всех вещественных чисел имеет отличную от них и именно бóльшую мощность.* Такое множество, которое допускает взаимно-однозначное сопряжение его элементов с натуральным рядом чисел (которое, следовательно, имеет с последним одинаковую мощность), называют счетным. Теперь мы можем так выразить упомянутую теорему: *все рациональные, а также все алгебраические числа образуют счетное множество, а множество всех вещественных чисел представляет несчетное множество.*

Начнем с доказательства этой теоремы для случая рациональных чисел, которое, несомненно, известно многим из вас. Всякое рациональное число — положительное или отрицательное — можно представить однозначным образом в виде дроби p/q, где p и q суть взаимно простые

целые числа и q, например, всегда имеет положительное значение (тогда как p может быть и отрицательным). Чтобы расположить все эти дроби p/q в один ряд, прежде всего отметим мысленно в плоскости pq все точки с целочисленными координатами p, q и расположим их в счетный ряд, как показывает спиралеобразный путь на фиг. 128. Соответственно этому мы можем перенумеровать все наши числовые пары (p/q) так, что каждой паре будет отвечать только одно целое число и в то же время будут исчерпаны все целые числа. Теперь откинем из этого ряда все те числовые пары, которые не удовлетворят высказанным выше условиям (отсутствие общих делителей и $q>0$), и перенумеруем только оставшиеся пары (отмеченные на рисунке точками). Получается такой двойной ряд:

Фиг. 128.

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11\ldots, \\ 1 & 0 & -1 & 2 & {}^1/_2 & -{}^1/_2 & -2 & 3 & {}^3/_2 & {}^2/_3 & {}^1/_3\ldots, \end{array}$$

в котором каждому рациональному числу соответствует ровно одно целое число и каждому целому числу — ровно одно рациональное; это доказывает счетность множества рациональных чисел. Заметим, что при этом расположении рациональных чисел в счетный ряд коренным образом нарушается их натуральная последовательность по величине; это видно на фиг. 129, где рядом с рациональными точками оси абсцисс написаны их порядковые номера в проведенном выше искусственном расположении.

Теперь мы перейдем к алгебраическим числам: здесь я также хочу ограничиться вещественными числами, хотя рассмотрение комплексных чисел, собственно, также не представляет существенных затруднений. Всякое вещественное алгебраическое число ω удовлетворяет некоторому вещественному целочисленному уравнению:

$$a_0\omega^n + a_1\omega^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\omega + a_n = 0,$$

которое мы можем считать неприводимым; другими словами, мы считаем, что выделены все, какие только можно, рациональные множители левой части, а также все общие делители целых чисел $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

Предположим также, что a_0 всегда есть число положительное. При таких условиях всякое алгебраическое число ω, как известно, удовлетворяет только одному неприводимому уравнению указанного вида с целыми коэфициентами; обратно, всякому такому уравнению принадлежит в виде корней, самое большее, n вещественных алгебраических чисел; но их может быть и меньше, чем n,

Фиг. 129.

или их может даже вовсе не быть. Если бы мы сумели расположить в один счетный ряд все такие алгебраические уравнения, то этим самым, очевидно, были бы перечислены и все их корни, а следовательно, и все вещественные алгебраические числа.

Кантору удалось достигнуть этого следующим образом: он относит каждому уравнению определенное положительное число, так называемую высоту уравнения:

$$N = n - 1 + a_0 + |a_1| + \ldots + |a_{n-1}| + |a_n|$$

и распределяет уравнения в счетный ряд классов, соответствующих значениям $N = 1, 2, 3, \ldots$ В каждом таком классе, согласно определению числа N, показатель степени n и абсолютная величина каждого из коэфициентов должны быть меньше конечного числа N, так что каждому классу может принадлежать вообще лишь конечное число уравнений и, в частности, лишь конечное число неприводимых уравнений. Коэфициенты легко можно определить путем испытания всех возможных комбинаций для данного значения N, а первые члены ряда уравнений для низших значений N можно написать сразу.

Теперь определим для каждой определенной высоты N вещественные корни всех принадлежащих к этой высоте неприводимых уравнений, число которых конечно; число этих корней также конечно, и мы можем расположить их по их действительной величине. Теперь возьмем

расположенные таким образом числа с высотой 1, затем числа с высотой 2 и т. д. и перенумеруем их в этом порядке. Этим будет действительно перенумеровано множество всех алгебраических чисел, так как, с одной стороны, мы таким образом приходим к каждому алгебраическому числу, а с другой — всякое целое число служит номером для некоторого алгебраического числа. Действительно, если иметь достаточно терпения, то можно определить, например, 7563-е число указанной схемы или же найти для всякого данного сколь угодно сложного алгебраического числа соответствующий ему номер.

В этом случае расположение в счетный ряд тоже нарушает коренным образом естественную последовательность алгебраических чисел по их величине, хотя она и сохраняется в каждой группе чисел одинаковой высоты. Так, например, два таких близких числа, как $\frac{2}{5}$ и $\frac{2001}{5000}$, имеют далеко отстоящие высоты 7 и 7001, между тем как $\sqrt{5}$, как корень уравнения $z^2-5=0$, имеет ту же самую высоту 7, что и $\frac{2}{5}$.

Прежде чем перейти к последнему примеру, я хочу сообщить вам небольшую вспомогательную теорему, которая доставит нам дальнейшие счетные множества и одновременно познакомит нас с одним приемом доказательства, которым мы воспользуемся еще впоследствии. Если даны два счетных множества:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots \text{ и } b_1, b_2, b_3, \ldots,$$

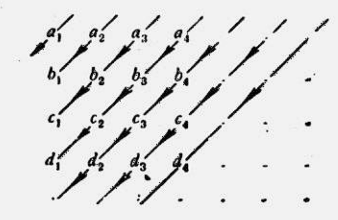
то множество всех a и всех b, получаемое от соединения обоих этих множеств в одно, тоже будет счетным. Действительно, его можно записать в таком порядке:

$$a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \ldots$$

и тем сразу же установить взаимно-однозначное соответствие с натуральным рядом чисел. Аналогично этому, 3, 4,... и, вообще, конечное число счетных множеств образуют, вместе взятые, снова счетное множество. Но не

столь очевидным представляется следующий факт, составляющий содержание нашей вспомогательной теоремы: соединение даже бесконечного, но счетного ряда счетных же множеств образует тоже счетное множество.

В самом деле, обозначим через $a_1, a_2, a_3, \ldots$ элементы первого множества, через $b_1, b_2, b_3, \ldots$ — элементы второго, через $c_1, c_2, c_3, \ldots$ — элементы третьего и т. д. и представим себе, что эти множества написаны одно под другим; тогда стоит только расположить все элементы в таком порядке, какой указывают последовательные диагонали в следующей схеме.



Получаемое при этом расположение элементов:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11...
a_1	a_2	b_1	a_3	b_2	c_1	a_4	b_3	c_2	d_1	$a_5\ldots$

относит всякому числу $a, b, c, \ldots$ один и только один номер, чем доказывается наше утверждение. Этот прием можно было бы назвать, имея в виду приведенную схему, „нумерацией по диагоналям“.

Огромное количество разнообразных счетных множеств, получаемых этим путем, могло бы заставить думать, что все вообще бесконечные множества счетны. Но, вопреки этому, мы докажем теперь вторую часть теоремы Кантора, по которой континуум всех вещественных чисел представляет несчетное множество; это множество мы будем обозначать знаком $\mathfrak{C}_1$, так как позднее нам придется еще говорить о континуумах многих измерений.

Множество $\mathfrak{C}_1$ можно, конечно, определить, как совокупность всех конечных вещественных значений x, причем x мы можем представлять себе, например, как абсциссу на некоторой оси. Покажем, прежде всего, что *множество всех внутренних точек отрезка с длиною 1* $(0<x<1)$ *имеет точно такую же мощность, как* $\mathfrak{C}_1$. В самом деле, изобразим первое множество точками оси x-ов, второе — точками отрезка-единицы оси y-ов, перпендикулярной к оси x-ов (фиг. 130); теперь можно установить между обоими множествами взаимно однозначное сопряжение при помощи любой монотонно возрастающей кривой указанного на фиг. 130 вида, которая имеет асимптотами слева прямую $y=0$, а справа прямую $y=1$, например, при помощи одной из ветвей кривой $y=-\frac{1}{\pi}\operatorname{arcctg}x$ [1]).

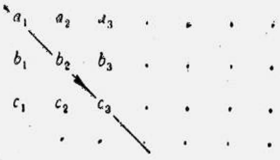
Фиг. 130.

Таким образом мы в праве заменить $\mathfrak{C}_1$ множеством всех чисел, содержащихся между 0 и 1, что мы и сделаем в дальнейшем.

Теперь я изложу то доказательство несчетности множества $\mathfrak{C}_1$, которое Кантор сообщил на съезде естествоиспытателей в Галле в 1891 г.; оно проще и более пригодно для обобщения, чем доказательство, опубликованное им впервые в 1873 г. Центральный пункт этого нового доказательства составляет один в высшей степени простой прием, так называемый „диагональный метод“, который при всяком счетном расположении всех вещественных чисел, какое мы могли бы только допустить, доставляет вещественное число, которое, наверное, не содержится в этом расположении; это составляет противоречие, и поэтому множество $\mathfrak{C}_1$ не может быть счетным.

[1]) Сопряжение устанавливается, следовательно, так, что каждому значению x соответствует определенная точка на кривой (имеющая это значение абсциссой), а этой точке соответствует определенное значение на оси y — ее ордината.

Напишем все наши числа $0<x<1$ в виде десятичных дробей; предположим, что все они расположены в счетный ряд:



где a, b, c обозначают любые из цифр 0, 1, . . . , 9, взятые в любом порядке. Прежде чем итти дальше, заметим, что децимальное начертание дробей не вполне однозначно, так как, например, 0,999 . . . = 1,000 . . . , и вообще всякую конечную десятичную дробь можно написать в виде бесконечной с периодом 9; это составляет одно из основных положений исчисления десятичных дробей (стр. 51). Чтобы установить однозначные обозначения, условимся раз навсегда употреблять только бесконечные десятичные дроби, т. е. вместо конечных дробей всегда писать дроби, кончающиеся периодом 9. Предположим, что в предыдущей схеме все дроби уже приведены к такому виду.

Чтобы образовать десятичную дробь x', отличную от всех чисел нашей схемы, выделим цифры a_1, b_2, c_3,..., стоящие в отмеченной на схеме диагонали (отсюда и самое название этого метода), и поставим на первом десятичном месте числа x' какую-нибудь цифру a'_1, наверное, отличную от a_1, на втором месте — какую-нибуль цифру b'_2 отличную от b_2, на третьем месте — цифру c'_3, отличную от c_3, и т. д.

$$x'=0,\ a'_1\ b'_2\ c'_3\ldots$$

Но эти условия относительно выбора цифр a'_1, b'_2, c'_3 предоставляют нам, очевидно, еще некоторый произвол; мы можем поэтому распорядиться так, чтобы x' было равно действительно десятичной дроби, а не 0,999... = 1, например, а также чтобы она не прекращалась после некоторого конечного числа знаков. Но в таком случае x', *наверное, отлично от числа* x_1, так как у них первые цифры неодинаковы, а между тем две бесконечные дроби могут быть равны между собой только в том случае, если у них одинаковы все соответствующие цифры.

Точно так же $x' \neq x_2$ вследствие различия вторых цифр, $x' \neq x_3$ из-за третьих цифр, и, таким образом, вообще число x', будучи вполне определенной десятичной дробью, оказывается отличным от всех чисел $x_1, x_2, x_3, \ldots$ счетной схемы. Следовательно, мы пришли к желательному противоречию, и это доказывает, что континуум $\mathfrak{C}_1$ представляет несчетное множество.

Эта теорема a priori обнаруживает существование трансцендентных чисел, ибо множество алгебраических чисел счетно и потому не может исчерпать несчетный континуум всех вещественных чисел. Но в то время как все прежние рассуждения знакомили нас с бесконечными, но счетными множествами трансцендентных чисел, теперь мы можем утверждать, что их мощность действительно превосходит мощность счетных множеств, так что только теперь мы получаем правильное общее представление об их многообразии. Приведенные выше частные примеры, в свою очередь, оживляют эту несколько абстрактную картину [1]).

Покончив, таким образом, с вопросом о континууме одного измерения, я считаю последовательным обратиться к континууму двух измерений. Прежде всякий, конечно, думал, что плоскость содержит больше точек, чем прямая; поэтому все были крайне удивлены, когда Кантор показал [2]), что мощность двухмерного континуума $\mathfrak{C}_2$ в точности равна мощности континуума одного измерения $\mathfrak{C}_1$. Если вместо $\mathfrak{C}_2$ возьмем квадрат со стороной 1, а вместо $\mathfrak{C}_1$ — отрезок единицы длины, то должно оказаться возможным установить между точками обоих образов взаимно-однозначное соответствие (фиг. 131). Причина того, что это утверждение представляется таким парадоксальным, заключается, вероятно, в трудности освободиться от представления об известной непрерывности соответствия, а между тем в действительности то соответствие, которое мы имеем в виду установить, оказывается в высшей мере разрывным или, если хотите, неорганическим.

[1]) Существование трансцендентных чисел первым доказал Лиувиль. В статье, помещенной в 1851 г. в XVI томе 1-ой серии журнала „Journal des mathématiques pures et appliquées“, он дает совершенно элементарный прием для построения таких чисел.

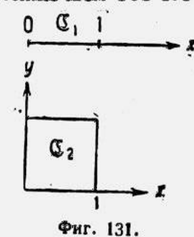
[2]) „Journal für die reine u. angewandte Mathematik“, Bd. 84 (1878).

Оно в такой же мере разрушает, кроме „мощности“, все, что является характерным для плоского и для линейного образа как таковых, как если бы все точки квадрата насыпали в мешок и затем самым основательным образом перемешали их.

Множество точек квадрата совпадает с множеством всех пар десятичных дробей вида:

$$x = 0, \ a_1\, a_2\, a_3 \ldots, \quad y = 0, \ b_1\, b_2\, b_3 \ldots,$$

которые мы, как и раньше, предполагаем написанными в бесконечном виде. Следовательно, мы исключаем те пограничные точки, для которых одна из координат x, y обращается в нуль, другими словами, исключаем обе стороны квадрата, примыкающие к началу координат O, между тем как обе остальные стороны мы сохраняем. Но нетрудно убедиться в том, что это нисколько не изменяет мощности множества точек. И вот, основная идея доказательства Кантора заключается в том, чтобы слить обе эти десятичные дроби в одну новую десятичную дробь z, по которой, в свою очередь, можно было бы однозначно определить x, y и которая принимала бы ровно по одному разу все значения $0 < z \leqslant 1$, когда точка (x, y) однажды пробегает по всему квадрату. Если рассматривать z как абсциссу, то получим действительно желаемое взаимно-однозначное сопряжение квадрата $\mathfrak{C}_2$ и отрезка-единицы $\mathfrak{C}_1$; при этом, соответственно предложениям относительно квадрата, у этого отрезка принимаем во внимание только одну конечную точку $z = 1$.



Фиг. 131.

Такое соединение мы попытаемся сперва получить тем, что положим

$$z = 0, \ a_1\, b_1\, a_2\, b_2\, a_3\, b_3 \ldots;$$

действительно, из этой дроби можно, отделяя четные и нечетные десятичные знаки, восстановить однозначным образом x и y. Но тут ввиду двоякого способа написания десятичных дробей возникает следующее возражение: такое z не пробегает всего ряда значений $\mathfrak{C}_1$, когда

за (x, y) принимаем последовательно все пары бесконечных десятичных дробей, т. е. все множество точек $\mathfrak{C}_2$; действительно, хотя при этом для z всегда получается бесконечная дробь, но существуют такие бесконечные дроби, как, например,

$$z = 0, c_1 c_2 0 c_4 0 c_6 0 c_8 \ldots,$$

которые получаются только из конечной дроби x или y, в нашем примере из

$$x = 0, c_1 000 \ldots, \quad y = 0, c_2 c_4 c_6 c_8 \ldots$$

Обойти это затруднение легче всего при помощи следующего видоизменения метода Кантора, предложенного Кёнигом (J. König) из Будапешта. А именно, Кениг понимает под a, b, c не отдельные цифры, а известные числовые комплексы, я бы сказал, „молекулы" десятичной дроби, соединяя в одно целое всякую значущую цифру, отличную от нуля, со всеми непосредственно ей предшествующими нулями, выделяя, таким образом, роль нулей. Тогда всякая десятичная бесконечная дробь должна иметь бесконечно много молекул, так как в ней появляются все снова и снова отличные от нуля цифры, и наоборот. Например, в дроби

$$x = 0{,}3208007000302405 \ldots$$

за такие „молекулы" следует считать:

$$a_1 = [3], \; a_2 = [2], \; a_3 = [08], \; a_4 = [007], \; a_5 = [0003],$$
$$a_6 = [02], \quad a_7 = [4], \ldots$$

Пусть теперь в вышеприведенном правиле сопряжения (x, y) и z символы a, b, c обозначают такие молекулы. Тогда всякой паре (x, y) будет снова однозначно соответствовать бесконечная дробь z, которая, в свою очередь, определит x и y. Но теперь всякая дробь z распадается на две дроби x и y, с бесконечным числом „молекул" каждая, и может возникнуть только однажды, когда мы за (x, y) будем принимать последовательно все пары бесконечных десятичных дробей. Но это действительно дает взаимно-однозначное отображение отрезка и квадрата одного в другом; следовательно, они имеют одинаковую мощность.

Конечно, совершенно аналогичным образом можно показать, что континуумы трех, четырех, ... измерений имеют такую же мощность, как и одномерный континуум. Но замечательно то, что и континуум $\mathfrak{C}_\infty$ бесконечно многих измерений, — точнее говоря, счетного множества измерений, — имеет такую же мощность; о таком пространстве бесконечно большого числа измерений теперь особенно много говорят в Геттингене. Его определяют как совокупность всех тех числовых систем, какие только может принимать счетное бесконечное множество переменных

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots,$$

если каждая из них пробегает весь ряд вещественных значений. Это представляет, собственно говоря, только новый способ выражения понятий, давно уже применяемых в математике. В самом деле, ведь всегда рассматривали совокупность всех степенных или тригонометрических рядов; счетное бесконечное множество коэфициентов этих рядов представляет, в сущности, не что иное, как такую же совокупность бесконечного числа независимых переменных, которые, впрочем, всегда подчинены еще известным условиям сходимости ряда.

Здесь мы снова ограничимся рассмотрением „куба-единицы" континуума $\mathfrak{C}_\infty$, другими словами, множества всех точек, удовлетворяющих условию $0 < x_n \leqslant 1$, и покажем, что эти точки можно привести во взаимно однозначное соответствие с точками отрезка-единицы $0 < x \leqslant 1$ континуума $\mathfrak{C}_1$. При этом снова, для удобства, отбрасываем все те пограничные точки, для которых одна из координат x_n равна нулю, и, соответственно, точку $x = 0$, все же остальные пограничные точки сохраняем. Исходим, как и раньше, из изображения координат точек континуума $\mathfrak{C}_\infty$ при помощи десятичных дробей,

$$\begin{array}{llll} x_1 = 0, & a_1 & a_2 & a_3 \ldots \\ x_2 = 0, & b_1 & b_2 & b_3 \ldots, \\ x_3 = 0, & c_1 & c_2 & c_3 \ldots \\ \ldots & & & \end{array}$$

причем все эти дроби должны быть написаны в бесконечном виде, а символы a, b, c, ... должны обозначать „молекулы десятичных дробей“ в установленном выше смысле, т. е. такие комплексы цифр, которые состоят из одной значащей цифры с предшествующими ей нулями. Теперь все это бесконечное количество десятичных дробей мы должны соединить в одну такую новую дробь, которая, в свою очередь, позволяла бы восстановить ее составные части, или, сохраняя химическое уподобление, скажем так: мы должны образовать такое нестойкое соединение всех этих молекулярных агрегатов, чтобы его легко можно было разложить на составные части. Этого удается достичь сразу же при помощи „способа диагоналей“, который мы уже применяли выше (стр. 379). Напишем наши „молекулы“ в том порядке, какой указывают последовательные косые линии в предыдущей схеме:

$$x = 0, a_1 a_2 b_1 a_3 b_2 c_1 a_4 b_3 c_2 d_1 a_5 \ldots;$$

таким образом со всякой точкой в $\mathfrak{C}_\infty$ однозначно сопрягается некоторая точка $\mathfrak{C}_1$. Обратно, таким образом можно получить всякую точку континуума $\mathfrak{C}_1$; в самом деле, зная ее изображение в виде бесконечной десятичной дроби, можно, пользуясь указанной схемой, однозначно определить бесконечное число бесконечных десятичных дробей $x_1, x_2, x_3, \ldots$, из которых данная дробь получается посредством указанного приема. Таким образом нам, действительно, удалось установить взаимно однозначное отображение единичного куба пространства $\mathfrak{C}_\infty$ на единичном отрезке континуума $\mathfrak{C}_1$.

В результате всего сказанного до сих пор мы убеждаемся в том, что существуют, во всяком случае, две различные между собой мощности: 1) мощность счетных множеств, 2) мощность всех континуумов (непрерывных протяжений) $\mathfrak{C}_1 \mathfrak{C}_2 \mathfrak{C}_3 \ldots$, вплоть до $\mathfrak{C}_\infty$.

Теперь естественно возникает вопрос о том, существуют ли еще большие мощности; оказывается, что, действительно, возможно указать еще большую мощность и притом не только при помощи абстрактных рассуждений, но даже оставаясь исключительно в пределах тех понятий, которые и без того всегда применяются в математике; а именно,

такой еще большей мощностью обладает 3) множество всевозможных вещественных функций $f(x)$ вещественной переменной x.

Здесь достаточно ограничиться изменением переменной в промежутке $0 < x < 1$. Прежде всего приходит в голову, что речь идет о множестве непрерывных функций $f(x)$. Однако здесь имеет место следующая замечательная теорема: множество всех непрерывных функций обладает мощностью континуума и, следовательно, принадлежит к группе 2. Новую большую мощность мы получим только в том случае, если примем во внимание также совершенно разрывные функции самого общего вида, какие только можно себе представить; иными словами, если со всякой точкой x будем сопрягать совершенно произвольное значение функции, не обращая никакого внимания на соседние значения ее.

Сперва я докажу упомянутую теорему относительно множества непрерывных функций; мне придется для этого повторить те соображения, которые служили нам выше (стр. 286 и сл.), для того чтобы выяснить возможность разложения „произвольных“ функций в тригоно-метрические ряды; впрочем, я должен буду местами придать этим рассуждениям более тонкий характер. Там я уже показал, что:

Фиг. 132.

a) непрерывная функция $f(x)$ вполне определяется ее значениями $f(r)$ во всех рациональных точках r (фиг. 132);

b) с другой стороны, нам известно, что все рациональные значения r можно расположить в один счетный ряд $r_1, r_2, r_3, \ldots$;

c) поэтому функция $f(x)$ оказывается вполне определенной, если известно счетное бесконечное множество ее значений $f(r_1), f(r_2), f(r_3), \ldots$ Впрочем, эти значения нельзя, конечно, выбирать совершенно произвольно, если желаем получить непрерывную функцию. Но множество всех возможных систем значений $f(r_1), f(r_2), \ldots$ содержит,

во всяком случае, как часть такое множество, которое имеет одинаковую мощность со множеством всех непрерывных функций;

d) величины $f_1 = f(r_1)$, $f_2 = f(r_2)$,... можно рассматривать как координаты в пространстве $\mathfrak{C}_\infty$, так как они ведь представляют счетное бесконечное множество непрерывно изменяющихся величин. Следовательно, соглас о доказанной раньше теореме, множество всевозможных систем значений функций имеет мощность континуума;

e) являясь частью этого множества, допускающего взаимно однозначное сопряжение с континуумом, само множество всех непрерывных функций может быть взаимно однозначно сопряжено с некоторым множеством составляющим часть континуума;

f) далее, мы без труда можем убедиться в том, что и, наоборот, весь континуум можно взаимнооднозначно отобразить в некоторой части множества непрерывных функций. Для этого стоит только рассмотреть функции $f(x) = k = \text{const}$, определяемые условиями $f_1 = f_2 = \ldots = k$, где k есть вещественный параметр. Когда k пробегает континуум $\mathfrak{C}_1$, $f(x) = k$, действительно, пробегает часть множества всех непрерывных функций, отображенную взаимнооднозначным образом в $\mathfrak{C}_1$;

g) теперь мы должны воспользоваться так называемой **теоремой об эквивалентности**, которую доказал Ф. Бернштейн (F. Bernstein)[1]: **если каждое из двух множеств эквивалентно некоторой части другого множества, то эти два множества эквивалентны между собой.** Эта теорема представляется в высокой степени очевидной; ее подробное доказательство завело бы нас слишком далеко;

h) континуум $\mathfrak{C}_1$ и множество всех непрерывных функций находятся между собой, согласно пунктам „e" и „f", как раз в том отношении, какое предполагает теорема об эквивалентности; следовательно, они обладают одинаковой мощностью, и, таким образом, наша теорема доказана.

Теперь перейдем к интересному доказательству нашего второго утверждения, что **множество всевозможных, действительно вполне произвольных функций обладает большей мощностью, чем континуум**; это доказательство представляет прямое применение диагонального метода Кантора:

[1]) Она впервые опубликована в книге Бореля, Leçons sur la théorie des fonctions, Paris 1898, стр. 103 и след.

a) допустим, что наше утверждение ложно, т. е. что множество всех функций можно взаимно однозначным образом отобразить в континууме $\mathfrak{C}_1$. Предположим, что при этом отображении всякой точке $x = v$ в $\mathfrak{C}_1$ соответствует некоторая функция $f(x, v)$ от x, так что когда v пробегает весь континуум, $f(x, v)$ изображает последовательно всевозможные функции от x. Мы приведем это допущение к нелепости тем, что построим функцию $F(x)$, отличную от всех функций $f(x, v)$.

b) для этого образуем „диагональную функцию" схемы функций $f(x, v)$, другими словами, такую функцию, которая во всякой точке $x = x_0$ принимает такое же значение, какое в этой же точке $x = x_0$ принимает функция $f(x, x_0)$, соответствующая значению параметра $v = x_0$, т. е. значение $f(x_0, x_0)$. Как функция от x, это есть попросту функция $f(x, x)$;

c) теперь построим такую функцию $F(x)$, которая отличается во всякой точке x от функции $f(x, x)$:

$F(x) \neq f(x, x)$ **для всякого частного значения** x.

Достигнуть этого можно самыми разнообразными способами, так как мы ведь допускаем совершенно разрывные функции, значение которых в каждой точке может быть определено самым произвольным образом. Примером может служить функция $F(x) = f(x, x) + 1$;

d) эта функция $F(x)$, действительно, отлична от каждой из функций $f(x, v)$. В самом деле, если бы $F(x) = f(x, v_0)$ для какого-нибудь определенного значения параметра $v = v_0$, то это равенство значений функций должно было бы иметь место, в частности, и в точке $x = v_0$, и, следовательно, было бы $F(v_0) = f(v_0, v_0)$. Но это противоречит допущению „c" относительно функции $F(x)$.

Этим опровергается предположение „a", будто функциями $f(x, v)$ можно исчерпать все множество функций; следовательно, наше утверждение доказано.

Интересно сравнить это доказательство с вполне аналогичным доказательством несчетности континуума. Подобно тому как там мы допускали возможность рас-

положения всех десятичных дробей в одну счетную схему, так и здесь мы рассматриваем схему функций $f(x, r)$; там мы выделяли диагональные элементы; здесь этому соответствует построение диагональной функции $f(x, x)$; то и другое находит затем одинаковое применение в образовании новой, не содержащейся в схеме, десятичной дроби и, соответственно, новой функции.

Вы легко можете себе представить, что при помощи подобных рассуждений можно восходить к бесконечным множествам все большей и большей мощности, высшей, чем те три мощности, с которыми мы познакомились до сих пор. Но самым замечательным из всех этих результатов представляется то, что между различными бесконечными множествами существуют вообще такие различия и градации, которые сохранялись, несмотря на то, что мы применяли к ним самые радикальные средства, какие только можно себе представить; мы разрушали все их особенности, как, например, их расположение и тому подобное, и сохраняли только их отдельные элементы, своего рода их атомы, как вещи, существующие совершенно независимо друг от друга и допускающие произвольную перетасовку между собой. Важно еще и то, что три из этих градаций мы смогли установить, оставаясь в рамках обычных в математике вещей — целых чисел континуумов (непрерывных протяжений) и функций.

Этим я закончу первую часть моего изложения теории множеств, посвященную понятию о мощности. В такой же конкретной форме, но только еще более кратко, я хочу сообщить вам теперь кое-что из второй части учения о множествах.

2. Расположение элементов множества.

Здесь на первый план выступает как раз то, что мы до сих пор принципиально оставляли в стороне, а именно вопрос о том, как отличаются между собой отдельные множества одинаковой мощности по взаимным отношениям расположения, натурально им принадлежащего. Ведь те взаимно однозначные отображения самого общего вида, которые мы до сих пор допускали, разрушали все эти соотношения, — вспомните хотя бы только об отображении квадрата на отрезке! Я бы хотел особенно подчеркнуть значение именно этого второго отдела учения о множествах; ведь не может же это учение иметь своею целью устранить, посредством введения новых, более общих понятий, те различия, которые с давних пор вошли в обиход математики; скорее, наоборот, это учение должно и может служить тому, чтобы с помощью общих понятий познать эти различия в их самой глубокой сущности.

Теперь наша цель заключается в том, чтобы выяснить себе на определенных, общеизвестных примерах понятие о различных возможных расположениях. Если начинать с счетных множеств, то мы знаем три совершенно разные формы расположения таких множеств, столь различные между собой, что равенство их мощностей составляло, как мы видели, особую и ни в каком случае не самоочевидную теорему; это следующие множества:

1) множество натуральных чисел;

2) множество всех (отрицательных и положительных) целых чисел;

3) множество всех рациональных чисел и множество всех алгебраических чисел.

Расположение элементов во всех этих трех множествах имеет одно общее свойство, в силу которого оно называется простым расположением множества. Это свойство состоит в следующем: из каждых двух элементов один определенный элемент всегда предшествует другому, т. е., выражаясь алгебраически, всегда известно, который элемент меньше и который больше; и далее, если из трех элементов a, b, c элемент a предшествует элементу b, а элемент b — элементу c, то всегда a предшествует элементу c (если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$).

Но, с другой стороны, имеют место такие характерные различия: в первом множестве существует первый элемент (нуль), который предшествует всем остальным, но нет последнего элемента, который следовал бы за всеми другими; во втором множестве нет ни первого, ни последнего элемента. Но в обоих этих множествах есть то общее, что за всяким элементом непосредственно следует определенный ближайший элемент, и всякому элементу непосредственно предшествует определенный другой элемент. В противоположность этому, у третьего множества

между каждыми двумя элементами всегда есть, как мы уже видели выше (стр. 45), бесконечно много других элементов; такое свойство множества мы обозначили термином „всюду плотное множество“, так что, в частности, среди всех рациональных или алгебраических чисел, лежащих между a и b, если не считать самих этих чисел, нет ни наименьшего, ни наибольшего числа. Таким образом способы расположения в этих трех примерах, их типы расположения (Anordnungstypen) (термин Кантора „типы порядка“, Ordnungstypen, кажется мне не столь характерным) все между собою различны, хотя самые множества имеют одинаковые мощности. С этим можно связать—и это действительно делают представители теории множеств—вопрос о всех вообще возможных типах расположения счетных множеств.

Перейдем теперь к рассмотрению множеств мощности континуума; здесь нам известно одно множество простого расположения, а именно континуум $\mathfrak{C}_1$ всех вещественных чисел. Но наряду с ним в двумерном и многомерных типах $\mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{C}_3, \ldots$ мы имеем примеры множеств с расположением элементов, отличным от того, который мы назвали „простым“. Так, в случае множества $\mathfrak{C}_2$, для того чтобы определить взаимное расположение двух точек, необходимы уже не одно, а два соотношения.

Здесь наиболее важно проанализировать понятие о непрерывности одномерного континуума; открытие того обстоятельства, что это понятие, действительно, основано только лишь на простых свойствах расположения, свойственного множеству $\mathfrak{C}_1$, является первой замечательной заслугой учения о множествах в деле выяснения основных математических понятий, а именно, оказывается, что все свойства непрерывности континуума проистекают из того обстоятельства, что последний представляет множество простого расположения со следующими двумя свойствами:

1. Если разделить множество на какие-либо две части А, В, но таким образом, чтобы всякий элемент принадлежал какой-либо одной из этих частей и чтобы все элементы, входящие в группу А, предшествовали всем элементам группы В, то в таком случае либо A имеет последний элемент, либо B имеет первый элемент. Вспоминая определение иррациональных чисел Дедекинда[1] (стр. 50 и сл.), мы можем выразить это свойство еще так: всякое „сечение“ в нашем множестве, действительно, производится одним из его элементов.

2. Между любыми двумя элементами множества всегда лежит еще бесконечно много других элементов.

Этим вторым свойством обладают одинаково континуум и счетное множество всех рациональных чисел; первое же свойство указывает на существенное различие между этими множествами. Всякое множество простого расположения, обладающее обоими этими свойствами, в учении о множествах называют непрерывным, по той причине, что для него, действительно, можно доказать все теоремы, которые имеют место для континуума в силу его непрерывности.

Я хочу еще указать на то, что эти свойства непрерывности можно формулировать также несколько иначе, а именно — исходя из так называемых „основных“ рядов Кантора. Основным рядом называют счетный ряд простого расположения, состоящий из таких элементов a_1, a_2, $a_3, \ldots$ данного множества, что в самом множестве каждый из них либо всегда предшествует элементу, следующему за ним в основном ряду, либо всегда следует за ним; так что:

$$\text{либо } a_1 < a_2 < a_3 < \ldots, \text{ либо } a_1 > a_2 > a_3 \ldots$$

Некоторый элемент a множества называют предельным элементом основного ряда, если — в первом случае — в основном ряду всегда найдутся элементы, бо́льшие всякого элемента, лежащего в данном множестве до a, но вовсе нет элементов, бо́льших хотя бы одного элемента, расположенного после a; аналогично определяют предельный элемент во втором случае. Если множество обладает тем свойством, что всякому входящему в его состав основному ряду соответствует в нем свой предельный

[1] Р. Дедекинд, Непрерывность и иррациональные числа. Одесса, „Mathesis“, 1910.

элемент, то множество называют замкнутым (abgeschlossen); если же, наоборот, всякий элемент множества является предельным элементом некоторого основного ряда, выделенного из него, то множество называют плотным. Непрерывность множеств с мощностью континуума состоит, существенным образом, в соединении обоих этих свойств.

Попутно я хочу здесь напомнить, что при беседе о диференциальном и интегральном исчислениях мы говорили еще и о другом континууме — о континууме Веронезе (Veronese), который возникает из обыкновенного континуума посредством присоединения актуально бесконечно малых величин. Хотя таким путем получается тоже множество простого расположения в том смысле, что вопрос о последовательности всяких двух элементов разрешается определенно, но тем не менее этот континуум обладает, конечно, совершенно иным типом расположения, чем обычный континуум $\mathfrak{C}_1$; теорема о том, что всякий основной ряд имеет предельный элемент, здесь уже не имеет места.

Теперь мы приходим к важному вопросу о том, при каких отображениях сохраняется различие между континуумами различного числа измерений $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots$ Дело в том, что взаимно-однозначное отображение самого общего вида, как нам уже известно, уничтожает между ними всякое различие. Ответ дает следующая важная теорема: число измерений континуума инвариантно по отношению ко всем взаимно-однозначным и непрерывным отображениям; другими словами, невозможно отобразить один в другом взаимно-однозначно и непрерывно два континуума $\mathfrak{C}_m$ и $\mathfrak{C}_n$, если $m \neq n$. Быть может, вы склонны принять эту теорему без дальних разговоров как самоочевидную; но вы не должны забывать того, что наивное представление, повидимому, исключало также возможность взаимно-однозначного сопряжения $\mathfrak{C}_1$ и $\mathfrak{C}_2$ вообще, и это побуждает нас быть осмотрительными по отношению к тому, что нам представляется очевидным.

Я хочу здесь подробнее разобрать только простейший случай [1]), в котором речь идет о сопряжении одномерного

[1]) Доказательство общего случая дал Броуэр (L. E. J. Brower) в 1911 г., в 70 томе журнала „Mathematische Annalen", стр. 161.

континуума с двумерным, и затем укажу лишь вкратце, какие трудности стоят на пути распространения этого доказательства на наиболее общий случай. Итак, мы хотим доказать, что взаимно-однозначное и непрерывное сопряжение между континуумами $\mathfrak{C}_1$ и $\mathfrak{C}_2$ невозможно. Здесь всякое слово имеет существенное значение: мы уже знаем, что здесь нельзя опустить требования непрерывности; с другой стороны, пример известной, конечно, многим из вас „кривой Пеано" показывает, что и взаимная однозначность не может быть опущена.

Прежде всего установим лемму: если два одномерных континуума $\mathfrak{C}_1$ и $\mathfrak{C}_1'$ непрерывным образом отображены один в другом и притом именно так, что всякому элементу из $\mathfrak{C}_1'$ всегда соответствует один и только один элемент из $\mathfrak{C}_1$, а всякому элементу из $\mathfrak{C}_1$ отвечает, самое большее, один элемент из $\mathfrak{C}_1'$, если, далее, a и b суть два элемента из $\mathfrak{C}_1$, которым, действительно, соответствуют в $\mathfrak{C}_1'$ два элемента a' и b', то всякому элементу c из $\mathfrak{C}_1$, который лежит между a и b, действительно, отвечает в $\mathfrak{C}_1'$ некоторый элемент c', лежащий между a' и b' (фиг. 133). Эта лемма соответствует известной теореме, согласно которой непрерывная функция $f(x)$, которая принимает в точках $x = a'$, b' значения a и b, принимает также всякое значение c, лежащее между a и b, в некоторой точке c', заключенной между a' и b'. Действительно, нашу лему можно доказать, как точное обобщение этой теоремы, исключительно на основании определенного выше понятия о непрерывности, если только самую непрерывность отображения непрерывных множеств определить вполне аналогично известному определению непрерывности функции; это удается сделать на основании одного только понятия о расположении. Но здесь не место подробнее развивать эти указания.

Фиг. 133.

Теперь перейдем к нашему доказательству. Предположим, что одномерный отрезок $\mathfrak{C}_1$ и квадрат $\mathfrak{C}_2$ сопряжены между собой взаимно-однозначно и непрерывно (фиг. 134). Пусть при этом двум элементам a, b отрезка $\mathfrak{C}_1$

отвечают элементы A, B квадрата $\mathfrak{C}_2$. Эти элементы A, B мы можем соединить внутри множества $\mathfrak{C}_2$ двумя различными путями, например указанными на рисунке ломаными $\mathfrak{C}'_1$, $\overline{\mathfrak{C}}_1'$. При этом нам не нужно предполагать никаких особых свойств множества $\mathfrak{C}_2$ вроде определения координатами и т. п.; мы должны лишь воспользоваться понятием о двумерной совокупности $\mathfrak{C}_2$. Но тогда, конечно, как $\mathfrak{C}_1'$, так и $\overline{\mathfrak{C}}_1'$ представляют континуумы простого расположения одного измерения, подобные $\mathfrak{C}_1$; в силу же предположенного взаимно-однозначного и непрерывного сопряжения множеств $\mathfrak{C}_1$ и $\mathfrak{C}_2$ всякому элементу $\mathfrak{C}_1'$ или $\overline{\mathfrak{C}}'_1$ должна отвечать ровно одна точка $\mathfrak{C}_1$, а всякому элементу на $\mathfrak{C}_1$ должен отвечать, самое большее, один элемент на $\mathfrak{C}_1'$ или на $\overline{\mathfrak{C}}'_1$. Таким образом как раз выполнены предположения нашей леммы: следовательно, всякой точке C' на $\mathfrak{C}_1$, лежащей между a и b, должна отвечать как точка C' на $\mathfrak{C}'_1$, так и точка $\overline{C}'$ на $\overline{\mathfrak{C}}_1'$, но это противоречит предположенной взаимной однозначности отображения, имеющего место между $\mathfrak{C}_1$ и $\mathfrak{C}_2$. Таким образом мы видим, что такое отображение невозможно, так что доказательство исчерпано.

Фиг. 134.

Чтобы распространить это доказательство на два любых континуума $\mathfrak{C}_m$, $\mathfrak{C}_n$, надо предварительно знать, каковы могут быть различные континуумы 1, 2, 3, ..., $m-1$ измерений самого общего вида, содержащиеся в $\mathfrak{C}_m$; если m и $n \geqslant 2$, то оказывается, что одного только понятия „между“, как только что в простейшем случае, недостаточно для того, чтобы провести доказательство. Эти случаи приводят к крайне сложным исследованиям, которые уже с самого начала обнимают собой очень трудные вопросы, лишь в последнее время несколько выясненные и имеющие основное значение в геометрии, а именно вопросы о наиболее общих непрерывных одномерных совокупностях точек в плоскости, в особенности, вопрос о том, когда именно такую совокупность можно назвать кривой линией.

Этим я закончу изложение учения о множествах и прибавлю еще лишь несколько замечаний общего характера. Прежде всего несколько слов о тех общих идеях, которые выработал Кантор по вопросу о положении, занимаемом учением о множествах по отношению к геометрии и анализу; эти идеи выставляют в особенном свете значение учения о множествах. Через всю историю математики, так же как и через все философские рассуждения о ее природе, проходит, как известно, красной нитью различие между дискретной величиной арифметики и непрерывной величиной геометрии. В новейшее время особенно стали выдвигать на первый план дискретную величину как наиболее легкую для понимания; на целые натуральные числа стали смотреть как на данные простейшие понятия, выводя из них по известному способу рациональные и иррациональные числа; таким образом, в конце концов, был получен весь аппарат, необходимый для господства анализа в геометрии, т. е. аналитическая геометрия. Эту тенденцию современного развития математики можно назвать арифметизацией геометрии: геометрическая идея непрерывности оказывается сведенной к идее целых чисел. Этого же направления мы придерживались, в главном, и в настоящих лекциях.

И вот в противовес этому одностороннему предпочтению целых чисел Кантор желает — как он сам мне говорил на съезде естествоиспытателей в Касселе — достигнуть „истинного слияния арифметики и геометрии“ в учении о множествах, другими словами, он желает представить учение о целых числах, с одной стороны, и теорию различных образов, непрерывно составленных из точек, с другой стороны, а также еще многое другое как равноправные и объединенные главы общего учения о множествах или совокупностях.

Я хотел бы еще присоединить сюда же кое-какие общие замечания об отношении учения о множествах к геометрии. В учении о множествах мы рассматривали:

1) мощность множеств как нечто такое, что сохраняется при всех взаимно-однозначных отображениях;

2) типы расположения множеств, соответствующие различным комбинациям элементов в отношении

их порядка. Здесь мы имели возможность охарактеризовать понятие о непрерывности, различные многократные расположения, или континуумы различного числа измерений и т. п.; таким образом в конечном счете сюда принадлежат, вообще, инварианты непрерывных отображений. При перенесении в геометрию это образует дисциплину, обозначенную со времени Римана термином „Analysis situs" (анализ положения); это — наиболее абстрактная глава геометрии; она исследует только те свойства геометрических образов, которые сохраняются при самых общих непрерывных взаимно-однозначных отображениях. Впрочем, уже Риман употреблял слово „Mannigfaltigkeit" (многообразие) в весьма общем смысле. Этим же самым словом пользовался вначале и Кантор, и лишь позднее он заменил его более кратким и потому более удобным термином „Menge" (множество, совокупность), который к тому же имеет одинаковый с первым словесный корень. В настоящее время употребление слова „Menge" настолько укоренилось, что считается совершенно отсталым всякий, кто еще говорит „Mannigfaltigkeit";

3) переходя к конкретной геометрии, мы встречаемся с различием между метрической и проективной геометрией. Здесь мало знать, что, например, прямая имеет одно измерение, а плоскость — два измерения; здесь нужно строить или сравнивать фигуры, причем желательно иметь в своем распоряжении постоянный масштаб или, по крайней мере, уметь прокладывать прямые в плоскости и плоскости в пространстве. Конечно, для каждой из этих конкретных областей необходимо к общим свойствам расположения присоединить специальную аксиоматику. Это означает, следовательно, дальнейшее развитие учения о непрерывных множествах в простом, двойном и, вообще, кратном расположении.

В мою задачу не может входить более подробное рассмотрение этих вещей, о которых мне к тому же придется подробно говорить в своих лекциях по геометрии в ближайшем семестре. Я бы хотел только указать литературу, в которой вы можете получить некоторые сведения. Здесь прежде всего приходится назвать соответствующие рефераты „Математической энциклопедии": „Основания геометрии" Энрикеса [1]) и „Понятия „линия" и „поверхность" Мангольдта [2]) по специальной аксиоматике, а также „Analysis situs" Дена Гегарда (Den-Heegaard) там же (III, A. B. 3). Последняя статья написана очень абстрактно; она начинается с весьма общих, установленных самим Деном формулировок понятий и основных фактов Analysis situs, из которых затем все прочее вытекает посредством чисто логической дедукции. Это представляет полную противоположность с тем индуктивным методом изложения, который я всегда рекомендую. Эта статья предполагает, собственно говоря, для полного понимания весьма подготовленного читателя, который уже продумал всю эту область, пожалуй, столь же основательно, как и сам автор.

Что касается литературы, посвященной учению о множествах, то я прежде всего должен указать на доклад, представленный Германскому союзу математиков Шенфлисом (A. Schönflies): „Развитие учения о точечных многообразиях" [3]); первая часть этого сообщения появилась в VIII томе журнала „Jahresberichte ber Deutschen Mathematiker-Vereinigung", а вторая появилась лишь недавно — в виде второго дополнительного тома „Jahresberichte". Эта книга, действительно, представляет реферат по всей теории множеств, в котором вы найдете ответ на весьма многие специальные вопросы. Наряду с этим я должен назвать первый и единственный систематический учебник по теории множеств, это — „Теория совокупностей точек" Юнга и его супруги [4]), упомянутой уже на стр. 270.

В заключение этих замечаний о теории множеств мы должны снова поставить тот же самый вопрос, который сопровождал все наши лекции: чем из всего этого можно

---

[1]) **Enriques**, Principien der Geometrie. Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, III, A. B. 1.

[2]) **Mangoldt**, Die Begriffe „Linie" und „Fläche". Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, III, A. B. 2.

[3]) „Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten", 2-я часть, Leipzig 1900 и 1908. Первая часть переиздана в 1913 г. под названием „Развитие учения о множествах и его приложений" (Entwicklung der Mengenlehre und ihrer Anwendungen); продолжением служит сочинение H. Hahn, Theorie der reelien Funktionen, Bd. I, Berlin 1921.

[4]) W. H. Joung and G. Ch. Joung, The theory of sets of points, Cambridge 1906.

воспользоваться в школе? Здесь этот вопрос можно, пожалуй, счесть за совершенно излишний, так как ведь всякий должен согласиться с тем, что к ученику нельзя подходить с такими абстрактными и трудными вещами.

Я хотел бы точнее выразить мое отношение к этому вопросу, а именно, сослаться на тот биогенетический основной закон, по которому индивид в своем развитии пробегает в сокращенном виде все стадии развития вида; эти идеи стали в настоящее время общим достоянием образованного человека. Этому основному закону, я полагаю, должно было бы следовать — по крайней мере, в общих чертах — и преподавание математики, как и вообще всякое преподавание. Мы должны приспособляться к природным склонностям юношей, медленно вести их к высшим вопросам и лишь в заключении ознакомить их с абстрактными идеями; преподавание должно итти по тому же самому пути, по которому все человечество, начиная с своего наивного первобытного состояния, дошло до вершин современного знания! Необходимо всегда повторять это требование, так как всегда находятся люди, которые по примеру средневековых схоластиков начинают свое преподавание с самых общих идей и защищают этот метод как якобы единственно научный. А между тем и это основание неправильно: научно обучать значит научать человека научно думать, а не оглушать его с самого начала холодной, научно наряженной систематикой. Существенное препятствие к распространению такого естественного и поистине научного метода обучения представляет, несомненно, недостаток в знакомстве с историей математики. Чтобы с этим бороться, я особенно охотно вплетал в мое изложение многочисленные исторические моменты. Пусть это покажет вам, как медленно возникали все математические идеи, как они почти всегда всплывали сперва, скорее, в виде догадки и лишь после долгого развития приобретали неподвижную, выкристаллизованную форму систематического изложения. Пусть это знание — этим пожеланием я хотел бы закончить мои лекции — окажет продолжительное влияние на характер вашего собственного преподавания в школе!

ДОПОЛНЕНИЕ I [1]

РАЗВИТИЕ РЕФОРМЫ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ В ГЕРМАНИИ

Шестнадцать лет прошло с тех пор, как настоящее сочинение получило, по существу, свою окончательную форму. Педагогические идеи, которые оно защищает, за это время вызвали к жизни обширную литературу об организации школьного дела и о методике преподавания математики; они оказали многообразное влияние на реорганизацию социального образования. Все тенденции к практическому осуществлению этих идей в настоящее время охватываются наименованием „реформы математического образования". Предшествующую историю этого реформационного движения, его возникновение в виде отдельных выступлений, его организационное объединение и последовавшее затем быстрое развитие — все это изложено в изданном IMUK [2]) сочинении Р. Шиммака „Развитие реформы преподавания математики в Германии" [3]), оно охватывает развитие движения до 1910 г. включительно. Другое сочинение, выпущенное в той же серии Г. Вейнрейхом, содержит обзор успехов реформы за период 1911—1913 гг. [4]). Относительно хода реформы в последующие годы еще нет необходимых отчетов. Мы изложим здесь вкратце важнейшие моменты развития движе-

[1]) Дополнения I и II написаны по согласовании с Клейном его сотрудником Ф. Зейфартом (Fr. Seyfarth).

[2]) IMUK—сокращенное название Интернациональной комиссии по преподаванию математики (Internationale Mathematische UnterrichtsKommission) см. ниже—стр. 406.

[3]) R. Schimmack, Die Entwicklung der mathematischen Unterrichtsreform in Deutschland, Leipzig 1911. Это сочинение составляет 1-й выпуск III тома, возникшего по инициативе Комиссии издания трудов по математическому образованию (см. ниже).

[4]) D. Veinreich, Die Fortschritte der mathematischen Unterrichtsreform seit 1910. „Berichte und Mitteilungen, veranlasst durch die Internationale mathematische Unterrichtskommission", Heft 10, Leipzig 1915.

ния по реформе до настоящего времени. Во введении к настоящим лекциям было уже упомянуто о комиссии по преподаванию математики, которую организовало Германское общество естествоиспытателей и врачей в 1904 г. на съезде в Бреславле. Ее называют коротко „Бреславльской комиссией". Ее возникновение представляло собой объединение двух мощных течений, имевших целью реформу среднего образования. Одно из этих течений исходило от математиков, другое — от биологов. Математическое направление поддерживалось Союзом германских инженеров (Verein Deutscher Ingenieure), Германским союзом для развития преподавания математики и естествознания (Deutsches Verein zur Forderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts) и кругами высшей школы, руководимыми Клейном. Эти три группы работали приблизительно до 1895 г. независимо друг от друга; с этого времени они приходят в соприкосновение, постепенно объединяются и поддерживают друг друга в общих тенденциях к преобразованию математического образования. Направление реформы должно было заключаться в том, чтобы в преподавании математики получили отражение ее приложения, а также идеи, лежащие в основе огромных успехов математических наук в XVIII и XIX столетиях, чтобы эти идеи заняли в преподавании то место, которое соответствует их значению в современной культуре[1]). Биологическое движение получило яркое выражение в 1910 г. на съезде Союза естествоиспытателей и врачей в Гамбурге после того, как преподавание биологии в высших классах средней школы было в Пруссии в течение 21 года вовсе воспрещено. На гамбургском съезде биологи дали своим требованиям выражение в виде ряда тезисов, которые явились предметом оживленных дискуссий и на последующих съездах союза.

На съезде в Касселе в 1903 г. Клейн выступил с предложением подвергнуть тенденции биологов и математиков совместному обсуждению. Это было осуществлено в 1904 г. в Бреславле и привело к организации Бреславльской комиссии. Ей было поручено разработать предложения относительно реорганизации преподавания

[1]) См. также предисловие редактора к настоящему русскому изданию.

математики, точного и описательного естествознания, которые, с одной стороны, были бы вполне осуществимы, а с другой стороны, были бы уже достаточно подробно разработаны. Комиссии было при этом предъявлено также требование согласовать часто проявлявшиеся противоречивые интересы различных специальностей с тем, чтобы одному из последующих съездов были доложены „согласованные предложения, приемлемые, по возможности, для всех заинтересованных сторон".

Комиссия работала напряженно и ей удалось в сравнительно короткое время в значительной мере справиться с поставленными ей задачами.

Уже в следующем, 1905 г. она представила, как известно, собранию естествоиспытателей в Меране проекты программ преподавания математики и естествознания в гимназиях, реальных гимназиях и высших реальных училищах[1]). Вслед за этим в 1906 г. на съезде в Штутгарте следовали программы для шестиклассных реальных училищ и реформированных школ[2]); наконец, в 1907 г. в Дрездене был уже представлен доклад по коренному вопросу всякой реформы преподавания, именно, о подготовке преподавательского состава. Конечно, как в этом вопросе, так и вообще во всех своих работах комиссия ограничилась нуждами и задачами средней школы. Особенное значение во всем движении по реформе получили так называемые „Меранские программы". Они уже в течение продолжительного времени представляют образец, на основе которого обсуждается осуществление реформы при всяком изменении в постановке среднего образования. Основные требования реформы, как мы уже при-

[1]) В германских гимназиях главное место в программах преподавания занимают древние языки (латинский и греческий); в реальных гимназиях преподается один латинский язык, за счет греческого усилено преподавание математики; в высших реальных училищах древние языки вовсе не преподаются, а место их занимают более обширные программы по математике, физике и химии. Еще и в настоящее время в Германии наиболее распространены классические гимназии; лишь в последние годы открыто, действительно, большое число реальных гимназий; число высших реальных училищ и по настоящее время невелико. *Ред.*

[2]) Реформированные школы (Reformschulen) — это частные учебные заведения с своеобразными программами, утверждаемыми министерством просвещения для каждой школы. *Ред.*

случае указывали, заключаются в том, чтобы вся система преподавания была психологически правильна, чтобы весь учебный материал был проникнут идеей функциональной зависимости в геометрическом ее освещении, чтобы принимались во внимание приложения математики. В организационном отношении Меранская программа требует для гимназий четыре часа математики во всех классах. Для прусских гимназий это составляет увеличение в средних классах на два часа. Именно в средних классах[1]) с 1892 г. число часов математики было снижено с четырех часов до трех в пользу греческого языка. Устранение этого сокращения математики в средних классах, в которых преподавание арифметики и геометрии должно производиться в широких размерах, издавна составляло важную задачу реформы: втиснутое в недостаточное число часов преподавание математики становилось тягостным для учащихся и привело к тому, что многие юноши чуждались математических предметов. Во многих отношениях Меранские программы следует рассматривать только как предварительные предложения, нуждающиеся в развитии и в дополнениях. Вполне разработанный план они содержат только для гимназий. Относительно целевой установки высших реальных училищ, развертывание которых было тогда еще в полном ходу, комиссия не была в состоянии притти к согласным результатам. В реальных гимназиях было предложено уравнять преподавание математики с классическими гимназиями; это составляло некоторое сокращение курса математики, но имело целью отвоевать некоторое время для естествознания. Но и по вопросу о том, надлежит ли вводить начала исчисления бесконечно-малых в курс гимназий, не удалось достичь единогласия. Этот вопрос в конце концов был оставлен открытым; была принята формула, допускавшая довольно широкое толкование, согласно которой „преподавание должно доходить до порога исчисления бесконечно-малых".

Разработав дрезденские предложения, которые были уже приведены на стр. 2, Бреславльская комиссия по существу должна была считать свою задачу исчерпанной и потому могла быть распущена. Подробный отчет о ее деятельности и сводку ее заключений, как было уже упомянуто на стр. 2, издал председатель ее А. Гутцмер. Благодаря работе этой комиссии большое число союзов, заинтересованных в усовершенствовании преподавания математики и естествознания, было привлечено к совместным выступлениям по этим вопросам. Вместо Бреславльской комиссии был организован на гораздо более широкой основе Германский комитет по преподаванию математики и естествознания (Deutscher Ausschuss für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht), на который было возложено, помимо выяснения некоторых теоретических, ранее еще не разработанных вопросов преподавания, главным образом, провести в жизнь предложения реформаторов в школьном деле. За этим комитетом (коротко называемым DAMNU) стоят 16 союзов — математические, физические, зоологические, химические, медицинские, технические объединения. Организационное заседание DAMNU состоялось в Кельне в 1908 г. Комитет не ограничил своей деятельности средней школой, но уделил особое внимание широко развертываемой и важной сети низшей школы. Прежде всего он сосредоточил внимание на вопросе о подготовке целесообразно подготовленного преподавательского состава. О деятельности комитета за годы 1908—1913 появился обстоятельный доклад, также составленный Гутцмером[1]). В дальнейшем систематические сообщения о деятельности DAMNU помещались в „Unterrichtsblätter", издаваемых Германским союзом для развития математического и естественно-научного образования, в журналах „Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht" и „Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung". Еще недавно DAMNU выступил со значительным изданием: „Новые планы („Neue Lehrpläne") преподавания естествознания и математики в средних учебных заведениях". Эти планы и программы, появившиеся в издании Тейбнера в 1922 г., содержат пересмотр и дополнения, сделавшиеся необходимыми как по причинам, изложенным выше, так и по иным сообра-

[1]) „Tertia"; последние два года обучения образуют „Prima" (первый двухлетний курс), предыдущие два года образуют „Secunda", которым предшествуют два года „Tertia". *Ред.*

[1]) A. Gutzmer, Die Tätigkeit des Deutschen Ausschusses für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht in den Jahren 1908—1913.

жениям[1]). Параллельно DAMNU работает другая организация, которая возникла также в 1908 г. по инициативе Союза германских инженеров и главным предметом своей деятельности избрала вопросы преподавания в технических учебных заведениях; это так называемый Германский комитет по делу технических школ (Deutscher Ausschuss für technisches Schulwesen, сокращенно DATSCH). Оба комитета работали в полном согласии; объединенные выступления обеспечивались уже тем, что часть членов одного комитета входила также в состав другого.

Что касается преподавания математики, то в этом отношении 1908 г. имел исключительное значение еще с другой стороны: он принес с собою решение Международного математического конгресса в Риме организовать Международную комиссию по преподаванию математики (Internationale mathematische Unterrichtskommission, сокращенно IMUK). Основанием для этого решения, принятого по инициативе американского математика Смита (D. E. Smith), послужил тот факт, что в то время и вне Германии во всех культурных странах, главным образом во Франции, Англии, Италии и в Североамериканских соединенных штатах, были в ходу тенденции по реформе преподавания математики. Сравнительное обозрение всех этих тенденций, равно как и систематическое изучение состояния, в котором находится преподавание математики в отдельных странах, должно было дать школьному делу этих стран сильные и ценные импульсы. Организация комиссии и руководство ее работой были поручены президиуму из трех лиц, в составе Ф. Клейна (председатель), Г. Грингила (G. Greenhill—Лондон, второй председатель) и Г. Фера (H. Fehr—Женева, генеральный секретарь). Для избрания Клейна решающее значение имела его деятельность по реформе математического образования, начинающаяся с 1893 г., а также его участие в многочисленных изданиях, в особенности в книге, которая в настоящем сочинении цитировалась как Клейн-Шиммак (стр. 3).

По первоначальному замыслу область деятельности комиссии должна была охватывать преподавание математики

[1]) Под этим сдержанным выражением Клейн явно разумеет требования, вызванные революцией. *Ред.*

в средних учебных заведениях. Но так как самая организация народного образования в различных странах чрезвычайно разнообразна, то скоро оказалось необходимым изучить состояние математического образования также в школах всех других типов. Была поставлена, таким образом, задача изучить всю область преподавания математики, начиная с детского сада и кончая высшей школой. Доклады, о составлении которых президиум прежде всего просил делегатов отдельных стран, должны были дать обстоятельные ответы на следующие вопросы:

1. Каково (в соответствующей стране) современное состояние преподавания математики как в смысле его организации, так и в отношении его целей и методов?

2. Какие обнаруживаются в этом деле современные тенденции?

Чтобы разработать эти вопросы, членам Международной комиссии было поручено организовать в каждой стране подкомиссию. Германской подкомиссии, работавшей под руководством Клейна, удалось в результате весьма сложного напряженного труда дать в длинном ряде статей полный обзор организации и методов преподавания математики в Германии, какого до того никогда не было, а по другим предметам преподавания не существует и по сей день. Эти обзоры распределены в пять томов, которые, в свою очередь, разбиваются на десять частей[1]).

Дальнейший том, составленный В. Литцманом (W. Lietzmann), содержит доклады и сообщения комиссии[2]). В нем содержится ряд циркуляров президиума и доклады о съездах IMUK, имевших место в 1910 г. в Брюсселе, в 1911 г. в Милане, в 1912 г. в Кэмбридже и в 1914 г. в Париже. В этом издании содержатся сверх того две отдельные статьи, к которым мы еще возвратимся ниже. Первые три тома изданий германской подкомиссии содержат обзоры преподавания математики в средних школах и научной подготовки преподаватель-

[1]) Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland, veranlasst durch die Internationale mathematische Unterrichtskommission, Leipzig, Teubner.

[2]) W. Lietzmann, Berichte und Mitteilungen, veranlasst durch die Internazionale mathematische Unterrichtskommission.

ского состава. Первый том посвящен Северной Германии, второй — Южной Германии. В третьем томе рассмотрен ряд отдельных вопросов. В нем помещена, между прочим, указанная уже на стр. 282 статья Г. Тимердинга (H. E. Timerding) о математике в учебниках физики, далее, статьи о постановке преподавания геометрического черчения, космографии, коммерческой арифметики, истории математики и философской пропедевтики в курсе математики. Психологическим основам преподавания математики посвящена монография Д. Катца под названием: „Психология и преподавание математики"[1]). Во второй половине третьего тома В. Лорей (W. Lorey) изложил историю преподавания математики в университетах с начала XIX в. Четвертый том содержит обзор преподавания математики в технических школах, а пятый посвящен постановке элементов математики в начальной школе и преподаванию математики в педагогических учреждениях. Подробный указатель всех статей и материалов, выпущенных германской подкомиссией, составили Е. и К. Кернер (E. und K. Körner); он напечатан в томе „Berichte und Mitteilungen".

Помимо составления этих обзоров по постановке школьного дела в Германии на долю германской подкомиссии выпала еще одна ответственная задача. С первых же шагов обнаружилось, что иностранные доклады нам не дают достаточно ясного представления об интересующих комиссию вопросах; это обусловливалось чрезвычайной запутанностью и своеобразием школьного дела в различных странах, часто совершенно чуждыми нам особенностями. Чтобы эти доклады все же имели и для нас стимулирующее значение, было необходимо дополнить их докладами, освещающими школьное дело иностранных государств под углом зрения германских установок. Для составления такого рода докладов оказались необходимыми поездки за границу с целью изучения школьного дела на местах. Однако вследствие войны мы до сих пор были в состоянии выпустить только два таких доклада: один, принадлежащий А. Рорбергу, относящийся к Дании, другой — обширный доклад Г. Вольфа, содержащий

[1]) D. Katz, Psychologie und mathematischer Unterricht.

207 страниц, относящийся к Англии [1]). Война положила этой работе конец.

Жертвой войны, самым глубоким образом потрясшей большинство международных организаций научного и культурного характера, в конце концов сделалась и Международная комиссия. В 1920 г. президиум был поставлен перед необходимостью объявить комиссию распущенной. Г. Фер представил свой журнал „L'Enseignement mathématique", служивший ранее официальным органом Международной комиссии, в распоряжение сохранившихся еще национальных подкомиссий. В 1920 г. он сам опубликовал в этом журнале заключительный доклад о деятельности Международной комиссии, сопроводив его подробным списком изданий, выпущенных комиссией и ее подкомиссиями. Из этого отчета усматриваем, что было выпущено всего 294 работы. Из них 53 падают на Германскую подкомиссию. Большое число предпринятых работ осталось незаконченным, в частности, изготовление сводного доклада о методах подготовки преподавателей математики в различных странах.

Мы обращаемся теперь к обзору главных достижений, которыми школьное преподавание в Германии обязано движению по реформе преподавания математики. Самые значительные успехи были достигнуты в этом отношении в В ю р т е м б е р г е. В 1912 г. в Вюртемберге были введены новые программы преподавания в мужских средних учебных заведениях. Все меранские предложения, относящиеся к выбору материала и методике преподавания математики, получили здесь осуществление полностью. Приведем здесь некоторые пункты вюртембергских программ, заслуживающие особого внимания.

На всех ступенях преподавания должен быть предоставлен самый широкий простор наглядным представлениям. Через все преподавание должны проходить сообщения из истории математических наук и сведения об отдель-

[1]) A. Rohrberg, Der mathematische Unterricht in Dänemark, Leipzig 1915.

G. Wolff, Der mathematische Unterricht an den höheren Knabenschulen Englands, Leipzig 1915.

Обе статьи помещены в томе „Berichte und Mitteilungen", но вышли и отдельными изданиями.

ных важных проблемах. К этим историческим замечаниям должны примыкать сообщения философского характера. Учащимся необходимо разъяснять значение математики для других наук, особенно для естествознания, техники и философии. Для всех типов школ требуется введение исчисления бесконечно-малых как обязательного предмета преподавания; в гимназиях оно ограничивается началами диференциального исчисления. Сверх того, при сравнении вюртембергских программ с обычными программами германских школ, особенно прусских, два обстоятельства резко бросаются в глаза: большое число часов, предназначенных для математики в реальных гимназиях и в высших реальных училищах, и усиленное внимание, уделяемое начертательной геометрии. В тесной связи с этим стоит организация преподавания в высшем техническом училище в Штутгарте: здесь студент, окончивший Вюртембергское высшее реальное училище, не должен начинать с тех же лекций, что и гимназист, и по действующим постановлениям может закончить свое образование в более короткий срок. Впрочем, внимание, уделяемое начертательной геометрии, является характерным не только для Вюртемберга, но и, вообще, для реальных учебных заведений южногерманских государств.

Почти одновременно с Вюртембергом меняет свои программы в направлении меранских предложений Баден, где во главе реформы стояли П. Штекель (P. Stäckel) и П. Трейтлейн (P. Treutlein); однако здесь реформа проникла только в реальные гимназии и в высшие реальные училища. В Баварии первые высшие реальные училища были организованы только в 1897 г.; в этих учебных заведениях с самого начала удалось провести в программы преподавания тенденции реформистов. В 1914 г. в Баварии была реорганизована постановка преподавания во всех средних учебных заведениях. Установленные в них в эту пору нормальные программы стоят на уровне тенденций реформистов как в отношении методики, так и по прорабатываемому материалу. Приходится, однако, жалеть о том незначительном числе часов, которые там уделяются математике в гимназиях и в реальных гимназиях. Представляется весьма сомнительным, чтобы требования баварских программ могли быть в этих учреждениях вы-

полнены в сколько-нибудь удовлетворительной мере, поскольку в средних и старших классах математике предоставлено только по три недельных часа.

В Пруссии развитие преподавания в средних учебных заведениях принимает, повидимому, такое же направление, как и в Баварии. Здесь до последнего времени значительным преобразованием могли похвалиться только женские школы и средние школы в узком смысле этого слова. В Пруссии под „средними школами“ разумеют низшие школы повышенного типа, которые не открывают, как в южногерманских государствах и в Австрии, доступа в высшие учебные заведения[1]). Эти „средние школы“ получили новые учебные программы в 1911 г.; женские школы были реорганизованы в 1908 г., а затем глубоко преобразованы в 1923 г. Во всех этих реорганизациях, в особенности при преобразовании женских школ, прогрессивные взгляды на реформу преподавания математики играли преобладающую роль.

Дело подготовки преподавателей математики для средних учебных заведений было реорганизовано в 1917 г., что очень существенно. В постановлениях об испытании кандидатов на учительские должности, действующих с того времени, от всех будущих учителей математики требуются некоторые познания по прикладной математике, именно, в области начертательной геометрии и практики вычислений.

В мужских средних школах программы преподавания, установленные в Пруссии в 1901 г., остались в полной силе до весны 1924 г. Правда, небольшое число учебных заведений получили от прусского министерства просвещения поручение ввести, в виде опыта, меранские программы. Вместе с тем многие учителя, несомненно, сумели и в рамках старых программ привести преподавание в соответствие с предложениями реформистов. Окончательная

[1]) Эти „средние школы“ называются в Пруссии „Mittelschulen“ в отличие от „Höhere Schulen“ (гимназии, реальные училища), которые представляют собою, собственно, „средние школы в обычном значении этого слова. У нас в СССР последним соответствуют школы второй ступени и школы повышенного типа (рабфаки, школы крестьянской молодежи). Проводимый у нас принцип единой школы стирает принципиальное различие между низшей и средней школами; это суть только две ступени единой школы. *Ред.*

реорганизация мужских средних учебных заведений намечена на весну 1925 г.[1]).

Как предполагается провести эту реформу, прусский министр просвещения Бёлитц (Bölitz) изложил в докладной записке, выпущенной в свет весной 1924 г. под названием: „Новая организация прусской средней школы“[2]).

Хотя в этой докладной записке программы еще нет, но из различных указаний, которые были даны школам, открытым после войны, можно отчетливо видеть, что стремления меранской реформы получают отражение в средних школах Пруссии как в отношении предметов, так и методов преподавания. Однако рассмотрение таблицы, содержащей распределение преподавания по часам, обнаруживает, что в гимназиях и реальных гимназиях предстоит сокращение преподавания математики и естествознания. Число недельных часов, уделяемых в четырех последних классах математике, низводится до трех. В своей докладной записке Бёлитц подкрепляет правильность той точки зрения, что математика и естествознание могут уложиться в меньшее число часов, авторитетом Г. Кершенштейнера (G. Kerschensteiner); но последний в письме к Клейну решительно возражает против этой точки зрения[3].

Изложенные предположения относительно постановки преподавания математики в прусской средней школе находятся в полном противоречии с течением, получившим в последние годы распространение в высших технических учебных заведениях. Огромные успехи науки за последние десятилетия уже сами по себе требуют удлинения срока обучения, если только мы желаем, чтобы подрастающее поколение инженеров стояло на высоте современного знания. С другой стороны, большая экономическая нужда, которую переживает страна, требует ограничения школьного времени, насколько это только возможно. Из этих противоречий есть, повидимому, только один выход,

[1]) Как указано в предисловии, настоящее сочинение выпущено Клейном в свет в печатном виде в 1924 г. *Ред.*

[2]) „Die Neuordnung des preussischen höheren Schulwesens“, 1924.

[3]) Это письмо частично воспроизведено в сборнике, выпущенном Германским союзом технико-экономических обществ — „Das höhere Schulwesen Stimmen gegen die Neuordnung des preussischen höheren Schulwesen“, Verlag des Vereins deutscher Ingenieure, Berlin 1924.

именно — приведение всей постановки преподавания в высшей технической школе в соответствие не с гимназией, как это было до сих пор, а с другими средними учебными заведениями, дающими бо́льшую подготовку по математике. На этот путь уже стала Берлинская высшая техническая школа. „Новые планы преподавания Берлинской высшей технической школы, — гласит распоряжение бывшего прусского министра народного просвещения Гениша (Hänisch), — предполагают у поступающих хорошие познания по арифметике, начертательной геометрии, физике и химии. Для тех, подготовка которых по этим предметам требует еще дополнений, особенно для абитуриентов гимназий и реальных гимназий, при Берлинской высшей технической школе будут организованы предварительные курсы; посещение этих курсов, имеющих целью подготовить студентов к настоящим лекциям высшей школы, в надлежащих случаях необходимо весьма настойчиво рекомендовать“. Таким образом Берлинская высшая техническая школа ставит курсы для начинающих на уровень подготовки абитуриентов высших реальных училищ. Существовало, однако, намерение провести повсюду менее радикальное преподавание, именно, поставить начальные курсы высших технических учебных заведений на уровень подготовки абитуриентов реальных гимназий. Эту точку зрения защищает бывший профессор Данцигской высшей технической школы Г. Аумунд, работающий в настоящее время в прусском министерстве просвещения; он проводит ее в брошюре, носящей название: „Высшие технические и экономические учебные заведения; меры по реформе высшей технической школы“[1]). Кроме упомянутого требования оно содержит еще одно, уже приведенное в исполнение; это требование заключается в том, что подготовку преподавателей математики для средних учебных заведений должны впредь взять на себя также высшие технические школы.

В соответствии с этими тенденциями высших технических учебных заведений их учебная комиссия (DAMNU) пересмотрела меранские программы и пришла к заклю-

[1]) H. Aumund, Die Hochschule für Technik und Wirtschaft. Massnahmen zur Reform der Technischen Hochschulen, Berlin, Verlag des Vereins deutscher Ingenieure, 1921.

чению, что нужно отказаться от общего уровня постановки математики в гимназиях и реальных гимназиях, повысив в последних удельный вес математики. Той же тенденции — установить возможно лучший контакт между реальными школами и высшими техническими учебными заведениями — соответствует другое требование DAMNU — усилить в высших реальных училищах и реальных гимназиях преподавание начертательной геометрии; между тем проведение реорганизации Бёлитца, вопреки этим стремлениям, создало бы в известной мере отрыв реальных гимназий от высшей технической школы и поставило бы последние в необходимость ориентироваться исключительно на абитуриентов высших реальных училищ. Если даже остановиться на этой мере, то германские высшие технические школы в отношении уровня требований подготовки поступающих студентов будут уступать высшим школам Австрии и Швейцарии. Последние требуют от поступающих такой подготовки по начертательной геометрии, которая в школе, вообще, может быть достигнута только в несколько лет обучения при большом числе недельных часов.

Если бы прусская реорганизация получила в этом виде осуществление, то это привело бы к необходимости увеличить срок обучения студентов, изучающих инженерные науки, примерно на два семестра. Понижение же требований на дипломных испытаниях при тяжелом экономическом положении Германии и острой конкуренции, угрожающей ей в области техники со стороны других государств, привело бы к последствиям, которые, вообще, не нуждаются в пояснениях. Для очень многих воспитанников гимназий и реальных гимназий, которые охотно посвятили бы себя техническому делу, такое продление срока обучения было бы тягостно уже в экономическом отношении. Приток абитуриентов гимназий и реальных гимназий в высшие технические учебные заведения сильно бы понизился. Количество же высших реальных училищ далеко недостаточно для того, чтобы обеспечить высшим техническим школам такое число студентов, которое соответствует потребности промышленности и народного хозяйства в просвещенных инженерах.

Таким образом предполагаемая реорганизация школьного дела в Пруссии в большой мере затруднит подготовку квалифицированных инженеров, если большое число реальных гимназий не будут при этом преобразованы в высшие реальные училища.

Обращаясь теперь к вопросу о том, что можно сказать о школьной реформе в Пруссии с точки зрения *университетов*, мы прежде всего хотели бы в этом отношении обратить внимание на одно обстоятельство, находящееся в тесной связи с теми задачами, которые преследует настоящее сочинение. Эти задачи заключаются в том, повторим это еще раз, чтобы выяснить взаимную связь отдельных математических дисциплин и их отношение к школьной математике; в соответствии с этим все настоящее сочинение написано в убеждении, что после специального образования, несомненно, необходимого будущим учителям, математические дисциплины должны быть им изложены именно с этой точки зрения; только этим путем можно достигнуть того, что познания, приобретенные в университете, окажутся действительно полезными в школе. Само собою разумеется, что обусловливаемые этим замыслом требования к преподавателям математики, естественно, должны быть в соответствующей форме предъявлены и к преподавателям всех других школьных предметов. Если мы посмотрим, в какой мере наше современное университетское преподавание соответствует такому требованию, то нужно будет признать факт, что оно лишь в редких случаях с ним сообразовано. Причиной этого упущения, может быть, отчасти служит то обстоятельство, что многие отдельные дисциплины развиваются с необычайной быстротой; университетский преподаватель вследствие этого часто бывает вынужден к узкой специализации предмета, и поэтому часто упускает из виду обзор науки в целом в том смысле, как мы об этом говорили выше. Если эта задача оказывается достаточно трудной даже в пределах части одной специальности, то тем сложнее подготовить преподавателей среднеучебных заведений таким образом, чтобы они были в состоянии выяснить учащимся отношение их специальности к другим отраслям знания; для университетов это почти неосуществимо. Между тем, именно таких преподавателей фактически требует докладная записка о школьной реформе в Пруссии. Так, например, согласно этой записке в высшем

реальном училище преподаватели немецкого и иностранных языков должны взять установку на специфический характер школ этого типа с преобладающими в них предметами—математикой и естествознанием. Между тем, такого рода преподавание, естественно, может иметь ценность только в том случае, если оно во всех своих частях опирается на основательное знание предмета; коль скоро это не имеет места, преподаватель не пользуется доверием учеников, и вся эта тенденция теряет серьезное значение. Современные преподаватели языков сами справедливо заявляют, что докладная записка требует от них работы, которой они просто не в состоянии выполнить при полученной ими подготовке. Но и в будущем университеты не будут в состоянии подготовлять преподавателей, соответствующих задачам, которые ставит докладная записка. Между тем, общее образование, которое прусская средняя школа после такой реорганизации будет давать своим абитуриентам в области математики и естествознания, неизбежно окажется для поставленной цели еще более недостаточным, нежели до сих пор: именно, в этих отраслях по реформе, предполагаемой Бёлитцем, преподавание будет в большей части учебных заведений сокращено или будет оставлено на существующем низком уровне[1]).

В связи с позицией, которую прусская реформа занимает по отношению к достояниям математического и естественно-научного образования, мы хотели бы указать на резко выраженные тенденции, направленные против математики и проявившиеся во многи культурных государствах после войны. В Германии это явление привело к тому, что в 1920 г. все математические союзы и общества объединились в Общегосударственный союз германских математических обществ и объединений (Reichsverband

[1]) В сборнике Германского союза научно-технических обществ, о котором уже упоминалось на стр. 4'2, содержится письмо Ф. Клейна, в котором он сравнивает реформу Бёлитца с задачами, которые современные условия жизни ставят университетскому преподаванию. Помимо указанных выше сомнений, Клейн подчеркивает еще противоречие, в котором прусская реформа стоит к новейшим общеимперским постановлениям о медицинском образовании. Эти постановления предъявляют к медикам по математике и естествознанию более высокие требования, чем это было до сих пор.

deutscher mathematischer Gesellschaften und Vereine) для совместной защиты интересов математики.

Эта враждебность к математике часто проявляется в кругах, имеющих одностороннюю литературно-эстетическую установку, и является практическим последствием всякого чисто интеллектуального образования. Между тем, в основе этого явления, повидимому, лежит грубое незнание действительного положения дела. Математика, конечно, не занимается вопросами этики, но именно благодаря этому она не может давать на вопросы о нравственности неправильные и скользкие ответы, какие мы часто встречаем в литературных произведениях; она не может подобно многим явлениям общественной жизни возбуждать в юношеской душе превратные и вредные представления о том, что правильно или неправильно. Причину интеллектуализма, действительно вызывающего отвращение (при котором острый ум часто соединяется со злобой, недомыслием, индиферентностью и цинизмом в вопросах морали), нужно, конечно, искать в других фактах, а не в том, что подрастающее поколение слишком много учится математике. С другой же стороны, воспитание, связанное с хорошим математическим образованием, дающее сильную дисциплину ума и склонность к фактическим суждениям, в настоящее время необходимо нашему юношеству более, чем когда-либо, так как в наши дни во всех отраслях общественной жизни царит глубокое смятение[1]).

Круги, враждебные математике, совершенно игнорируют также значение математики в общей культуре человечества. „Мы должны работать над тем,—говорит Клейн в лекции по подготовке преподавателей,—чтобы создать действительную, положительную связь

[1]) Все это скользкое рассуждение носит ярко выраженный отпечаток мировоззрения германских консерваторов, к которым при всей силе и оригинальности своего ума все же принадлежал Ф. Клейн, вероятно, принадлежал и его сотрудник Ф. Зейфарт. Вряд ли может быть сомнение в том, что под „явлениями общественной жизни, возбуждающими в юношеской душе превратные и вредные представления о том, что правильно и что неправильно", автор разумеет настроения революционного германского пролетариата. Нет нужды здесь вступать с ним в полемику. Во всей этой тираде действительно справедливо лишь то, что, конечно, не в избытке школьной математики коренятся источники таких настроений.

между теоретической наукой и всем тем, что движет современную жизнь. И мне кажется, что в этом отношении на математика выпадает особенно важная задача. В противоположность другим наукам, математика основана не на одном единственном периоде истории человечества, она сопровождала развитие культуры на всех ее ступенях. Математика также сращена с эллинским образованием, как и с самыми современными задачами инженерного дела; она не только протягивает руку развертывающемуся естествознанию, но принимает одновременно участие и в абстрактных исследованиях логиков и философов. Соответственно этому наша особенная задача должна была бы заключаться в том, чтобы растить в окружающей нас среде убеждение в солидарности всех высших научных интересов"[1]).

---

[1]) Эта цитата заимствована из статьи „Die Anforderungen der Ingeneurie und die Ausbildung der mathematischen Lehramts Kandidaten". Лекция, прочитанная в Ганноверском математическом обществе 20 апреля 1896 г. Напечатано в издании F. Klein und E. Riecke, Über angewandte Mathematik und Physik in ihrer Bedeutung für den Unterricht an den höheren Schulen, Leipzig 1900 (стр. 222—228).

ДОПОЛНЕНИЕ II

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ О МАТЕМАТИЧЕСКОЙ И ДИДАКТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЕ

Мы сделаем здесь краткий обзор литературы, соответствующей педагогическим тенденциям настоящего сочинения, но в тексте еще не упомянутой. На исчерпывающую полноту этот обзор ни в каком отношении не претендует; напротив, мы старались привести здесь преимущественно такие сочинения, которые, в свою очередь, содержат более обширные литературные указания.

Самым обширным и исчерпывающим сочинением, которое излагает историческое развитие математических наук примерно до 1800 г. во всем их объеме, является история математики М. Кантора (M. Cantor) в четырех томах[1]).

Углубленное историческое исследование, прежде всего критические изыскания шведского историка и математика Энестрёма (G. Eneström), изложение которых мы находим в журнале „Bibliotheca Mathematica", обнаружили, что выводы Кантора во многих деталях должны быть признаны правильными. Самый журнал „Bibliotheca Mathematica", посвященный истории математики, был основан Энестрёмом в 1884 г.; он же и руководил этим изданием, пока его существование не прекратилось вследствие войны. Критическая работа Энестрёма в полной мере учтена во втором издании „Истории элементарной математики" И. Тропфке (I. Tropfke), на которую мы уже не раз ссылались в тексте. Правда, под элементарной математикой Тропфке разумеет только традиционный материал, издавна составляющий предмет преподавания в средней школе; в историческое развитие идей, которыми этот материал

---

[1]) M. Cantor, Geschichte der Mathematik, Bd. I, 3 Aufl., 1907; Bd. II, 2 Aufl.; перепечатано в 1913 г. Bd. III, 2 Aufl., 1901; Bd. IV; новое стереотипное издание 1924 г. Leipzig, Teubner.

пронизывают тенденции реформы, он не входит. Гораздо больше выявляет ход развития математики и ее связь с общей культурой Макс Симон (Max Simon) в своей „Истории математики в древности в связи с историей античной культуры“ [1]).

Но наиболее ценным трудом этого рода является статья Г. Цейтена (H. G. Zeuthen) „Математика в древности и в средние века“, помещенная в коллективном издании „Современная культура“ [2]); тому же автору принадлежат также многочисленные монографии и отдельные издания по тому же предмету. По XVI—XVIII столетиям историю математики для того же коллективного издания должен был написать П. Штекель (P. Stäckel). К сожалению, он преждевременно скончался; заместителя же ему разыскать не удалось. Вследствие того, что выпала эта статья, изложение истории математики в XIX столетии, представляющей особенные трудности, уже не было возможности организовать.

Ответить на вопросы философского характера имеют в виду две монографии А. Фосса (A. Voss): „О сущности математики“ и „О математическом познании“ [3]). Последняя также помещена в издании „Современная культура“.

Две другие статьи того же коллективного издания имеют целью провести в широкие круги понимание той роли, которую математика занимает в общих основах нашей культуры. Первая из них, касающаяся, собственно, отношения математики ко всей культуре, также принадлежит Фоссу, вторая принадлежит Г. Тимердингу и трактует об истории математического образования в самом широком смысле этого слова [4]).

---

[1]) M. Simon, Geschichte der Mathematik des Altertums in Verbindung mit antiker Kulturgeschichte, Berlin, B. Cassirer, 1909.

[2]) H. G. Zeuthen, Mathematik im Altertum und im Mittelalter. „Kultur der Gegenwart“, Leipzig, Teubner, 1912. См. также русский перевод книги Цейтена под тем же названием изд. ГТТИ 1932 г.

[3]) A. Voss, Über das Wesen der Mathematik, 3 Aufl., Leipzig 1923. Über die mathematische Erkenntnis, Leipzig 1914. Первая книга имеется в русском переводе; она глубоко проникнута идеалистическими построениями.

[4]) A. Voss, Die Beziehungen der Mathematik zur Kultur der Gegenwart. H. E. Timerding, Die Verbreitung mathematischen Wissens und mathematischer Auffassung, Leipzig 1914.

Богатым источником исторических сведений, главным образом о математике XIX в., служит „Энциклопедия математических наук“, выпуски которой выходят с 1898 г. в издании Тейбнера в Лейпциге. Идея этого превосходного начинания чрезвычайно большого значения возникла у Ф. Клейна, Г. Вебера и Ф. Майера в 1894 г. во время совместного путешествия по Гарцу. Осуществление его сделалось возможным, когда была обеспечена поддержка германских академий. В семи томах, распадающихся на отдельные части, „Энциклопедия“ должна была дать общее изложение математических наук и их важнейших приложений в сжатой форме, пригодной для быстрой ориентировки, но в то же время с возможно большей полнотой; тщательно подобранные литературные указания дают полную картину о ходе развития математических методов с начала XIX столетия. Общие сведения об осуществлении этого начинания мы находим во вводной статье Дика (V. Dyck), предпосланной первому тому „Энциклопедии“ (1904 г.). Области алгебры, арифметики и анализа, которым посвящен настоящий том нашей книги, разработаны в первых двух томах „Энциклопедии“; как и все издание, они близки к завершению. На различные статьи этих томов нам уже не раз приходилось ссылаться в тексте. Особенно отметим статью А. Прингсгейма (A. Pringsheim) об иррациональных числах и сходящихся последовательностях (1898 г.); впрочем, этот материал получил более систематическую обработку в первом томе сочинения Прингсгейма „Учение о числах и функциях“ [1]). Упомянем еще раз, что очень целесообразно рядом с немецким изданием „Энциклопедии“ пользоваться и французским, так как многие французские статьи появились значительно позже, а потому часто отличаются большей полнотой. Седьмой том „Энциклопедии“ должен был быть посвящен истории, философии и дидактике математических наук, однако неблагоприятные условия времени не дали возможности издать этот дополнительный том.

В третьем томе „Энциклопедии“ помещены три статьи, посвященные элементарной геометрии — Зоммера (Sommer), Захариаса (Zacharias) и Беркгана (Berkhan); между тем,

---

[1]) A. Pringsheim, Vorlesungen über Zahlen- und Funktionentheorie, 2 Aufl., Leipzig 1923.

нашим трем великим А (арифметика, алгебра, анализ) соответствующих элементарных статей не посвящено. Они обработаны в „Энциклопедии элементарной математики“ Вебера и Вельштейна, на которую мы не раз давали указания в тексте. Этот том появился в 1922 г. в четвертом издании; оно выпущено в свет П. Эпштейном (P. Epstein) и по сравнению с предыдущими изданиями во многих отношениях переработано и дополнено. По своему характеру это новое издание, может быть, даже более предыдущего отличается от настоящего курса. Оно содержит систематическое построение элементарной математики с подробным выяснением понятий, лежащих в ее основе. Взгляд Эпштейна на элементарную математику не покрывается тем, что под этим разумеют в школе. „Элементарно“ означает для него не то, что просто и легко доступно; элементарная математика для Эпштейна есть основа высшей. Таким образом мы находим в его книге подробные отвлеченные рассуждения относительно понятий о числе, о пределах — вопросы теории чисел и т. п.; между тем, началам исчисления бесконечно-малых, сторонником введения которых автор и сам является, он не уделяет внимания.

Обратимся теперь к сочинениям, которые разрабатывают вопросы элементарной математики. Здесь мы прежде всего должны указать на „Энциклопедию преподавания математики“ — совокупность изданий IMUK и ее национальных подкомиссий. В сочинениях IMUK содержится огромный материал, богатый педагогическим опытом и дидактическими познаниями. Упомянутый уже общий указатель, составленный Е. и К. Кернер, дает возможность легко ориентироваться в десяти частях „Трудов и сообщений“ немецкой подкомиссии (стр. 408). К педагогическому сочинению Макса Симона, на которое мы уже указывали в начале книги (стр. 6), мы должны еще присоединить „Дидактику“ Гёфлера и „Методику преподавания математики“ Литцмана[1]). В методике Литцмана уже получили отражение все работы IMUK и DAMNU. Первый том рассматривает организацию и технику преподавания

[1]) A. Höfler, Didaktik des mathematischen Unterrichts, Leipzig 1910. W. Lietzmann, Methodik des mathematischen Unterrichts, Bd. I, Leipzig 1919; Bd. II, Aufl. 1923; Bd. III, 1924.

математики. Третий том, в котором методически разрабатываются прикладная математика и философская ее сторона, только что вышел в свет. Первый том сочинения Литцмана дает достаточные сведения о многочисленных учебниках по математике для средних школ, которые отразили идеи реформационного движения.

Мы обращаемся теперь к литературе, относящейся к некоторым отдельным вопросам особой важности. Здесь мы, в первую очередь, должны остановиться на проблеме обоснования арифметики, которая в последние годы выдвинута на первый план научных интересов благодаря работам Л. Броуэра (Brouwer), Д. Гильберта (D. Hilbert) и Г. Вейля (H. Weyl). Дополнительно к тому, что изложено по этому вопросу в начале настоящих лекций (стр.13 и сл.), прежде всего нужно указать на исследования Г. Фреге (G. Frege) и Б. Рёсселя (B. Russel).

Первое сочинение Фреге появилось в 1884 г. под названием: „Основы арифметики. Логико-математическое исследование о понятии числа“[1]).

В первых главах этого сочинения, написанных доступно и очень интересно, Фреге подвергает обстоятельной критике различные взгляды, которые мы находим у Лейбница, Канта, Ганкеля, Милля и др. относительно понятия о количестве, относительно природы математических аксиом, относительно понятия единого и единицы. Последние главы, также доступно изложенные, содержат собственные исследования Фреге относительно обоснования арифметики. Эти исследования развиты и усовершенствованы в главном сочинении Фреге в его двухтомной книге „Основные законы арифметики“ [2]). Это сочинение написано в большей своей части в особой символике, изобретенной автором. Хотя эта символика преследует ту же самую цель, что и идеография Пеано, о которой мы упоминали на стр. 16, но внешне она существенно отличается от последней. Сверх того, книга Фреге содержит еще обширные критические рассуждения о различных теориях иррациональных чисел, доступные без ознакомле-

[1]) G. Frege, Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl, Breslau 1884.

[2]) G. Frege, Die Grundgesetze der Arithmetik, Bd. I, 1893; Bd. II, Jena, H. Pohle, 1903.

ния с его символикой. Цель Фреге заключается в том, чтобы свести предложения и понятия арифметики к логике; последнюю он понимает значительно шире классической логики. С его точки зрения арифметика представляет только широко развернутую логику, а счет есть не что иное, как ряд умозаключений. Но в то же время Фреге относится совершенно отрицательно к чисто формальным теориям арифметики, по которым числа представляют собой ничего не означающие знаки, подвергающиеся только условно установленным правилам действий. Последнюю точку зрения он отвергает еще и потому, что она устанавливает непроходимую пропасть между арифметическими соотношениями и их применениями. С его точки зрения арифметические равенства, поскольку они должны получать применение, необходимо должны иметь внутреннее содержание; и в этом значении числовых знаков должны находить свое обоснование и правила арифметики. Искусственного расщепления проблемы об основании арифметики на две части, именно на доказательство отсутствия противоречия и установление ее применимости, мы у него не находим. Он считает, что отсутствие противоречия уже доказано, коль скоро удается чисто логически выразить арифметические предложения. Однако незадолго до окончания своего главного труда Фреге под влиянием Рёсселя пришел к заключению, что и логике нельзя приписать абсолютно достоверного значения. Понятие о количестве Фреге сводит к „множеству" или, как он предпочитает говорить, „к объему понятия"; но, как известно, неограниченное применение понятия о множестве приводит к трудностям, которые под названием „парадоксов учения о множестве" играют большую роль в философско-математической литературе последних десятилетий. Возникновение этих противоречий поставило под вопрос возможность чисто логической теории арифметики, к которой стремился Фреге. Спасти такую теорию прежде всего стремятся два английских математика В. Рёссель и А. Уайтхед (A. N. Whitehead). Следующие их сочинения, преследующие эту цель, имеют во взаимной их сфере наибольшее значение.

1. B. Russel, The principles of mathematics, Cambridge, 1903.

2. A. N. Whitehead and B. Russel, Principia Mathematica, Cambridge, 1910—1913 (три тома).

3. B. Russel, Introduction to mathematical philosophy, London 2 ed. 1920 [немецкий перевод, сделанный Е. И. Гумбелем (E. I. Gumbel) и В. Гордоном (W. Gordon), выпущен в 1923 г. в Мюнхене].

Рёссель пытается разрешить парадоксы учения о множествах при помощи теории, которую он называет учением о типах. Согласно этому учению источником противоречий, возникающих в теории множеств, служит то обстоятельство, что мы пользуемся „неоднородными" множествами. Под таковыми он разумеет такие множества, элементами которых являются объекты различных логических типов. Таким „неоднородным" множеством является, например, множество всех вещей. Это множество должно было бы содержать в качестве элементов конкретные вещи, множества конкретных вещей соотношения и свойства таких вещей, представления о них и т. д. Но по Рёсселю множества конкретных вещей принадлежат не тому типу, к которому относятся соотношения между ними. Очень запутанное учение о типах в связном виде изложено в сочинении „Principia Mathematica", в названном же выше „введении" Рёссель уделяет ему мало места. Самостоятельную обработку этого учения содержит геттингенская диссертация Г. Бемана (H. Behmann); это сочинение имеется в двух машинописных экземплярах, из которых один находится в геттингенской университетской библиотеке, а другой в Берлинской государственной библиотеке[1]).

Однако отнюдь нельзя сказать, чтобы усовершенствованное теорией типов сведение математики к логике получило всеобщее признание; так Л. Броуэр и Г. Вейль являются представителями других воззрений на этот предмет, которые во многих отношениях расходятся со взглядами Рёсселя и Фреге. С точки зрения этих исследователей задача заключается не в логическом обосновании арифметики, а в математическом обосновании логики. „Логика покоится на математике, а не наоборот",

[1]) H. Behmann, Die Antinomien der Mengenlehre und ihre Auflösung durch die Theorien von Russel und Whitehead.

говорит Броуэр в своей работе, носящей название „Интуиционистское учение о множествах“ [1]).

В то время как у Фреге и Рёсселя натуральное число определяется с помощью понятия о множестве, у Броуэра и у Вейля представление о натуральном ряде чисел есть последняя исходная основа математического мышления, „множество“ же есть уже понятие производное. У Броуэра и у Вейля в основе самого определения множества лежит понятие о натуральном ряде как заданное интуитивно. Из работ Вейля, относящихся к этому предмету, отметим его лекции, опубликованные в 1921 г. под названием „О новом кризисе в деле обоснования математики“ [2]).

Но при дальнейшей обработке теории Броуэра и Вейля также обнаружились затруднения. Оказывается, между прочим, что с их точки зрения один из наиболее плодотворных приемов в анализе, именно применение предложения, что каждое ограниченное множество вещественных чисел имеет верхнюю границу, должен быть устранен, так как это предложение не может быть обосновано.

Против такого рода выступлений, имеющих угрожающее значение для больших отделов анализа, которые до настоящего времени считались строго обоснованными, направлены новейшие исследования Гильберта. Эти работы представляют собой развитие идей, которые он изложил в 1904 г. на конгрессе в Гейдельберге; они также были уже вкратце охарактеризованы на стр. 18. Их цель заключается в том, чтобы доказать отсутствие противоречия в арифметических аксиомах как таковых. Сущность своих взглядов Гильберт со всей определенностью изложил в 1922 г. в докладе „Об основаниях математики“, прочитанном им на собрании естествоиспытателей в Лейпциге [3]). Он хочет категорически устранить все сомнения относительно достоверности математических умозаключений. На стр. 19 была высказана мысль, что такого рода задача чисто логическими средствами, без некоторого минимума наглядных представлений, невыполнима. В полном согласии с этим находится и основная мысль Гильберта; она заключается в том, что отсутствие противоречий ряда положений должно всегда устанавливаться путем созерцания конечных множеств. Из относящейся сюда литературы, кроме упомянутого выше доклада, укажем еще следующие работы:

1. D. Hilbert, Neubegründung der Mathematik, „Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität.
2. P. Bernays, Die Bedeutung Hilberts für die Philosophie der Mathematik; „Hilbert-Festschrift“ der „Naturwissenschaften“, 1922.
3. P. Bernays, Über Hilberts Gedanken zur Grundlegung der Arithmetik, „Jahresberichte der Deutschen Mathematikervereinigung, Bd. 31, 1921.
4. W. Ackermann, Begründung des „Tertium non datur“ mittels der Hilbertschen Theorie der Widerspruchsfreiheit „Mathematische Annalen“, 1925.

Подробное изложение разнообразных воззрений, царящих в современных исследованиях по основам математики, можно найти во втором издании сочинения Френкеля „Введение в учение о множествах“ [1]). Укажем еще на относящиеся к этому вопросу работы М. Паша (M. Pasch), из которых мы здесь назовем две:

1. M. Pasch, Der Ursprung des Zahlbegriffs, T. I „Archiv der Mathem. und Physik“, Bd. 28, 1919. T. II „Mathematische Zeitschrift“, Bd. 11, 1921.
2. M. Pasch, Betrachtungen zur Begründung der Mathematik, „Mathematische Zeitschrift“, Bd. 20, 1924.

В качестве хорошего введения в круг идей, связанных с работой Дедекинда „Что такое числа и что они означают“ (стр. 17 настоящего сочинения), укажем еще на вступительную лекцию Г. Гессенберга „О значении чисел“ [2]).

---

[1]) L. Brower, Intuitionistische Mengenlehre, „Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung“, Bd. 28, 1920. С 1924 г. Брауэр публикует в журнале „Mathematische Annalen“ ряд статей, имеющих целью развернуть учение о множествах с точки зрения интуиционистов.

[2]) H. Weyl, Ueber die neue Grundlagenkrise der Mathematik, „Mathematische Zeitschrift“, Bd. 10, 1921.

[3]) Доклад напечатан в „Mathematische Annalen“, Bd. 88, 1922.

[1]) A. Fränkel, Einführung in die Mengenlehre, Berlin 1923 Ср. также статью H. Weyl, Randbemerkungen zu Hauptproblemen der Mathematik, „Mathematische Zeitschrift“, Bd. 20, 1924.

[2]) G. Hessenberg, Vom Sinn der Zahlen, Leipzig 1922.

Эта лекция, предназначенная для широкого круга читателей, написана с большой простотой и живостью.

Мы переходим теперь к вопросу, какую позицию нужно занять в школьном преподавании по отношению к этим новым исследованиям в области оснований математики. Очень интересно выслушать по этому вопросу мнение одного из наиболее выдающихся исследователей в этой области. Уайтхед, сотрудник Рёсселя, посвятил этому вопросу статью, помещенную в 1913 г. в журнале „Enseignement Mathématique“ под названием „Основы математики в элементарном преподавании“ [1]).

Для него целью математического образования является воспитание логической строгости мысли; однако он считает нелепым требовать от ученика в начале обучения той же тщательности логического суждения, как и в конце его. Способность к ясному логическому мышлению должна развиваться постепенно. Было бы педагогической ошибкой начинать обучение с последних достижений научного процесса, именно, с основных понятий в их утонченной, расчлененной и наиболее общей форме. Логическая точность для Уайтхеда есть совершенная разработка всех логических шагов в ходе доказательства. Установить из теоретических соображений строгую границу между степенью логической точности (в этом порядке идей было бы, может быть, отчетливее сказать „логической атомистики“), которая необходима для современного логического исследования, и той строгости мысли, которая в большинстве случаев достаточна для практических целей, включая сюда и дело преподавания, — задача совершенно невыполнимая. Это — вопрос психологии, который должен разрешаться экспериментально. Эти взгляды по существу вполне совпадают с воззрениями, изложенными в тексте на стр. 399—400.

Из сочинений, которые оспаривают эту логистику в педагогическом деле, которые борются с тенденциями к систематической или даже аксиоматической постановке начального обучения, которые настаивают на необходимости психологической установки учителя, назовем следующие.

[1]) A. Whitehead, The principles of mathematics in relation to elementary teaching.

1. Упомянутая уже книга, появившаяся в продаже, IMUK, D. Katz, Psychologie und mathematischer Unterricht.

2. B. Branford, Betrachtungen über mathematische Erziehung vom Kindergarten bis zur Un versität, Lpz, 1913.

Для самого учителя является, конечно, очень ценным, чтобы не сказать необходимым, углубленное знакомство с аксиоматикой. Но нельзя недооценивать и опасность, которая, как указывает опыт, проистекает из односторонних занятий аксиоматикой и от пренебрежения к изучению более наглядных математических дисциплин фактического свойства. Преподаватель, оставляющий университет с преобладающим перевесом абстрактной установки, утративший в себе интерес к более простым и наглядным вопросам математики, часто не бывает в состоянии при своей аксиоматической подготовке проявить необходимую готовность подчиниться в своей педагогической деятельности психологической необходимости, и часто результатом его педагогических устремлений является полная неудача. Вряд ли может подлежать сомнению, что современное университетское преподавание чистой математики не соответствует нуждам школы. Помимо общего устремления в область основ математики, проникновение в курсы анализа учения о множествах грозит в настоящее время более, чем когда-либо, углубить пропасть между университетом и школой. В какой мере в последнее десятилетие преобразился курс анализа под влиянием абстрактных рассуждений учения о множествах, об этом свидетельствует книга Каратеодори „Функции вещественной переменной“, упомянутая уже на стр. 399 книга Гана и принадлежащая А. Розенталю статья о функциях вещественной переменной [1]).

Эта роль теории множеств начинается с появлением „Курса анализа“ К. Жордана [2]) и особенно поддерживается первыми тремя изданиями учебника, принадлежащего бельгийскому математику де-ля-Вале Пуссену [3]).

[1]) Carathéodory, Reelle Funktionen, Leipzig 1913; A. Rosenthal, Reelle Funktionen, „Enzyklopädie d. Mat. Wiss.“, Bd. II, 3, № 7, 1924.

[2]) C. Jordan, Cours d'analyse, Paris 1893; в последние годы вышло уже 3-е издание этого курса.

[3]) De-la-Vallée Poussin, Cours d'analyse mathématique, t. I, Paris 1903; t. II 3-ème éd. 1914. Первый том вышел в русском переводе.

Вопрос о строгости математического обучения прежде всего дискутировался по отношению к исчислению бесконечно-малых. Относительно геометрии этот вопрос подвергся тщательному обсуждению на съезде IMUK в 1911 г.; по отношению к исчислению бесконечно-малых тот же вопрос обсуждался на парижском съезде в 1914 г. Доклады об этих съездах можно найти в журнале „Enseignement Mathématique" соответственно за 1911 г. и за 1914 г., т. 16. Особенного внимания заслуживает в последнем томе доклад М. Беке „О результатах, полученных при введении диференциального и интегрального исчислений в старших классах средних учебных заведений" [1]).

Этот доклад помещен также в указанном на стр. 407 томе „Berichte und Mitteilungen" IMUK. Неоднократно преподаватели высших учебных заведений возражали против введения диференциального и интегрального исчислений в среднюю школу, мотивируя это тем, что строгая постановка этих предметов в школе невозможна, нестрогая же бесполезна, даже вредна. В основе этой точки зрения лежит недоразумение, заключающееся в том, будто в школе предполагается систематический курс исчисления бесконечно-малых. Это ясно выражено в выступлениях Стюди (Study), который вначале выступил в качестве решительного противника этой реформы, но затем высказался следующим образом [2]): „Если я должен вследствие этого притти к заключению, что хорошие результаты, будто бы полученные на практике повсюду при введении преподавания спорного предмета, основаны на самообмане преподавателей, относящихся к делу недостаточно критически, если я вследствие этого должен отклонить систематическое преподавание в школе диференциального и интегрального исчислений, то я не хочу этим сказать, что о такого рода вещах совершенно не должно быть речи в школе. Тенденции реформистов, на мой взгляд, содержат в себе совершенно здоровое ядро; их

[1]) M. E. Becke, Sur les résultats obtenus dans l'introduction du calcul différentiel et integral dans les classes supérieures de l'enseignement secondaire.

[2]) „Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht", 1909, стр. 68 и сл.

можно было бы всемерно приветствовать, если бы они, как это обычно бывает в такого рода случаях, не шли дальше цели. Ведь школа вовсе не представляет собой прежде всего учреждения для подготовки учителей-специалистов; ученики имеют полное право на то, чтобы получать о результатах и приложениях нашей науки такие сведения, которые, с одной стороны, вполне доступны их пониманию, а с другой стороны, могут быть им свободно сообщены в отведенное для математики время. Если, например, сведения по аналитической геометрии даются при изложении законов падения тяжелых тел или при иных простых и конкретных примерах, при которых упомянутые трудности еще не возникают, если сообщаются основные понятия исчисления бесконечно-малых, даже с соответствующим знакоположением, если при этом исключаются неправильные или недоступные ученику обобщения, если, наконец, все это делается всякий раз по подходящим поводам, то в этом, на мой взгляд, нет вредного предвосхищения задач университетского образования. Напротив того, интересы учащихся этим путем активно возбуждаются к образованию необходимых и важных научных понятий. Многое практически полезное можно с успехом показать при помощи графического изображения функциональной зависимости". Эти взгляды, конечно, хорошо согласуются с тенденциями реформы, изложенными в тексте на стр. 332.

Отрицательное отношение многих преподавателей высших учебных заведений к введению исчисления бесконечно-малых в среднюю школу питается еще тем обстоятельством, что появляющиеся время от времени статьи преподавателей этих школ часто обнаруживают отсутствие ясности в понимании основных понятий этого исчисления. Хорошим примером такой публикации может служить появившаяся в Штеттине книга, принадлежащая А. Келлеру и претендующая даже на руководящее значение для преподавателей математики [1]). В третьей части этой книги на стр. 91 автор начинает изложение диференциального исчисления параграфом о дробях вида $^0/_0$.

[1]) A. Köller, Methodischer Führer und Ratgeber für den mathematischen Unterricht.

Здесь автор различает два вида нулей. Приведем соответствующие предложения дословно:

а) „Абсолютный нуль, т. е. действительное ничто; такой нуль получается, например, при полном отнимании отрезка, вообще при отнимании какого-либо предмета“.

в) „Относительный нуль, т. е. бесконечно малая величина; она равна нулю по сравнению (относительно) с конечной величиной. Она получается, например, в том случае, когда мы берем треть отрезка, затем треть этого нового отрезка и продолжаем этот прием бесчисленное множество раз“.

„При производстве деления, повторяемого бесчисленное множество раз, получается относительный нуль N_1; при повторном делении получается новый относительный нуль N_2, причем

$$N_2 = \frac{1}{3} N_1.$$

Таким образом не все относительные нули равны между собой“.

„Дробь $\frac{0}{0}$ при относительном понимании нулей может иметь совершенно различные значения, смотря по величине отдельных нулей“.

Из последнего утверждения совершенно ясно, что относительные нули, как их понимает автор, представляют собой вид неархимедовых бесконечно-малых. Главная задача диференциального исчисления есть для него введение в изучение такого рода бесконечно-малых. Его предложение заключается в том, чтобы обучение диференциальному исчислению начинать с непосредственных действий над этими бесконечно-малыми величинами dx, не прибегая к „проходному паспорту“ в виде Δx и без „шлагбаума теории пределов“. „Так дело идет очень хорошо, — говорит автор, — без формализма таинственной теории пределов учащиеся проще и естественнее осваиваются с областью бесконечного“.

В установившемся ныне математическом анализе под бесконечно-малой величиной разумеют совершенно не то, что предлагает этот советчик-методист, именно переменную величину, стремящуюся к нулю. Говоря о порядке бесконечно-малой, имеют в виду только установить относительную степень приближения этой величины к нулю. Понятие о пределе лежит уже в основе определения бесконечно-малой величины.

Много вины за ту путаницу, которую мы часто наблюдаем в основных понятиях исчисления бесконечно-малых, несут рассуждения, относящиеся к этому предмету и исходящие от философов, несмотря на то, что имеются весьма ясные и достаточно простые издания, предназначенные как раз для этого круга читателей. Назовем следующие:

1. G. Hessenberg, Das Unendliche in der Mathematik, Abhandlungen der Friesschen Schule, Heft 1.

2. A. N. Whitehead, An Introduction to Mathematik, Williams and Norgate, London; год не указан.

Математикам рекомендуем еще упомянутую уже выше книгу Прингсгейма по теории функций и чисел, в которой основные понятия анализа разбираются очень подробно и обстоятельно. Укажем, однако, здесь и критику этой книги, которую опубликовал Ган[1]) в „Геттингенских известиях“ в 1919 г. Ган решительно отклоняет тенденцию автора к полной арифметизации, во имя которой он принципиально изгоняет из анализа все средства доказательства, основанные на наглядных геометрических представлениях. Ган считает это непедагогичным и логически неоправданным. „Подобно очевидности геометрической, алогической, по своему характеру, которую мы относим к наглядному восприятию, также, несомненно, существует и арифметическая очевидность алогического типа“. — „Исключение из числа доказательных средств наглядных геометрических представлений без всякого обоснования, допуская в то же время представления арифметические, кажется мне актом догматического произвола; укреплять эти средства исследования (т. е. наглядные геометрические представления), делать их более тонкими, а не заглушать, не устранять их совсем, и в то же время сохранять в силе неумолимые требования полной логической строгости всякого доказательства, представляется мне важной задачей математиче-

[1]) „Göttingener Gelehrte Anzeigen“, Jahrgang 181, 1919, стр. 321—340.

ского образования как при устном изложении, так и в учебниках".

Специально в отношении элементарной математики укажем еще книгу К. Коммереля „Понятие о пределе в элементарной математике"[1]).

В заключение дадим здесь место еще некоторым литературным указаниям, относящимся к численным и графическим вычислениям. Что касается последних, то со времени появления первого издания настоящих лекций получил широкое распространение метод графического решения уравнений, вкратце изложенный на стр. 134 и сл. настоящего издания. В своем развитии этот метод носит название номографии. Первое обширное изложение этой дисциплины принадлежит французскому математику д'Окань[2]).

Кроме указанной уже в тексте статьи, в энциклопедии, принадлежащей Мемке, заслуживает еще внимания краткий обзор Шиллинга (Schilling) и еще один учебник, выпущенный Мемке в 1917 г., наконец, укажу еще два томика Тейбнеровской физико-математической библиотеки, принадлежащие П. Лукей: „Введение в номографию"[3]). Благодаря Лукей номографические методы проникли также в школу и в ней получили даже большее распространение, нежели в университетском преподавании. Наиболее распространенным примером номограммы является арифметическая линейка, получившая уже применение во многих средних школах. Аппарат Мемке для решения уравнений, изображение которого помещено в тексте на стр. 145, можно также рассматривать как пример пространственной номограммы. Что касается числовых вычислений, то по этому предмету в самое последнее время появилось сочинение К. Рунге и Г. Кёнига[4]); в связи с этим представляют интерес две исторические работы, относящиеся к Гауссу:

[1]) A. Kommerell, Der Begriff des Grenzwerts in der Elementarmathematik, „Beiheft 6 zur Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht", Leipzig, Teubner, 1922.

[2]) D'Ocagne, Traité de nomographie, Paris 1889; 2-е изд., 1921. Готовится к печати русский перевод этого сочинения.

[3]) P. Luckey, Einführung in die Nomographie, Teubner, Leipzig 1918, 1920.

[4]) C. Runge und H. König, Numerisches Richnen, Berlin 1924.

1. A. Galle, Gauss als Zahlenrechner, Leipzig 1918.
2. Ph. Männchen, Die Wechselwirkung zwischen Zahlenrechnen und Zahlentheorie bei Gauss, Leipzig 1918.

Первая брошюра представляет четвертый, а вторая шестой выпуск издаваемых Ф. Клейном и М. Бренделем „Материалов для научной биографии Гаусса"[1]). Обе статьи предназначены также для одиннадцатого тома полного собрания сочинений Гаусса.

---

[1]) F. Klein und M. Brendel, Materialien für eine wissenschaftliche Biographie von Gauss.

ДОПОЛНЕНИЯ РЕДАКТОРА

I. ПЛАН ВТОРОЙ ЧАСТИ („АЛГЕБРЫ")

План, по которому выбран автором материал, вошедший в состав второй части этого тома („Алгебры"), может, как нам кажется, представиться читателям неясным, и мы считаем полезным его несколько выяснить.

При решении алгебраических уравнений общих типов существенную роль играют, конечно, буквенные коэфициенты, в них входящие. Иными словами, в общих уравнениях коэфициенты являются переменными параметрами, от значения которых зависят значения корней. Число параметров, от которых зависит уравнение, часто может быть уменьшено. Так, в общем уравнении третьей степени число параметров равно трем, но может быть сведено к двум. Точно так же чирнгаузеновским преобразованием, надлежащим образом выбранным, число параметров уравнения пятой степени также может быть сведено к двум [1]). Вот почему Клейн и классифицирует уравнения по числу входящих в него параметров. Эта точка зрения отличается значительно большей общностью, чем обыкновенное выражение уравнения в буквенных коэфициентах, так как самые коэфициенты могут чрезвычайно разнообразно выражаться в тех или иных параметрах; число параметров может иногда даже превышать число коэфициентов, и с такого рода случаями постоянно приходится встречаться. Клейн рассматривает только уравнения, содержащие один или два параметра.

Итак, положим, что нам дано уравнение, содержащее один параметр или несколько. В чем заключается задача решения уравнения? Очевидно, в том, чтобы выразить корни уравнения в функции этих параметров. Этому порядку идей алгебра следует и в классическом ее изложении.

[1]) Правда, при этом уравнение пятой степени распадается на несколько типов уравнений о двух параметрах.

В уравнениях первой степени корень непосредственно выражается рационально в тех параметрах, от которых уравнение зависит. Следующий шаг заключается в решении двучленных уравнений вида $x^n = a$, содержащих один параметр a. С давних времен были указаны методы вычисления корней этих уравнений в зависимости от параметра, и в этом смысле функциональная зависимость, выражаемая этим уравнением, была изучена. Это формулировали так, что извлечение корня должно быть отнесено к числу операций, хорошо известных. Классическая постановка задачи об алгебраическом решении уравнений в том именно и заключалась, что старались свести решение всякого уравнения к решению двучленных уравнений. Как известно, это удалось для уравнений второй, третьей и четвертой степеней. Относительно же уравнений более высоких степеней было обнаружено, что их решение, вообще говоря, не может быть сведено к извлечению корней, т. е. к решению двучленных уравнений. Когда это вполне выяснилось, то дальнейшее развитие теории алгебраического решения уравнений, естественно, пошло двумя путями. Во-первых, старались выделить те алгебраические уравнения высших степеней, которые все же могут быть разрешены в радикалах. Это течение идет от Абеля и Галуа и в работах Кронекера до известной степени получило свое завершение. Другое течение ставит себе задачу более широкую. Если прежние средства отказались служить, то нужно найти новые. Подобно тому как были изучены двучленные уравнения, нужно подыскать новую категорию уравнений, найти непосредственные пути к вычислению их корней, изучить, таким образом, определяемую этими уравнениями функциональную зависимость и попытаться свести обширные группы уравнений к этим новым основным типам. К этому направлению относится известная работа Клейна об икосаэдре. Здесь разобран ряд таких основных уравнений; общие результаты этого исследования приведены во II главе „Алгебры".

Но для того чтобы искать новые основные типы уравнений, нужна руководящая нить. Этой руководящей нитью служило изображение функциональной зависимости, определяемой этими уравнениями, на римановых поверхностях. Эта зависимость в случае двучленных уравнений приводит

к разделению сферы на двусторонники (сферические вырезки). Если мы разрежем эти двусторонники по экватору и станем искать уравнения, которые приводят к этому подразделению, то придем к уравнению диэдра. Дальнейшее развитие этой идеи, которое читатель найдет в тексте, приводит к уравнениям многогранников. Клейн указывает категорию уравнений, которые приводятся к этим типам, но, к сожалению, эти категории гораздо менее обширны, нежели те, которые сводятся к двучленным уравнениям. Вот почему эти замечательные исследования, глубокие по замыслу и необычайно талантливые по своему выполнению, все же носят специальный характер.

II. О РИМАНОВЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

1. Положим, что w есть независимая переменная в области комплексных чисел, а z — однозначная функция от w:

$$z = f(w). \tag{1}$$

Возьмем две плоскости и, выбрав на каждой начало, полуось положительных чисел и единицу длины, будем обычным способом наносить на одной плоскости значения независимой переменной w, а на второй — соответствующие значения функции z.

Допустим для простоты, что значения независимой переменной покрывают всю числовую плоскость. Тогда зависимость (1) относит каждой точке плоскости w одну определенную точку на плоскости z. Двум различным точкам на плоскости w может иногда отвечать одна и та же точка на плоскости z; например, если соотношение (1) имеет вид $z = w^2$, то точкам w и $-w$ всегда отвечает одна и та же точка z. Но одной и той же точке на плоскости независимой переменной всегда отвечает только одна точка на плоскости z.

В этом заключается геометрический смысл однозначности функции z; на это опираются и все методы геометрического исследования однозначных функций комплексной переменной.

2. Положим, что z есть непрерывная функция от w. Если w описывает непрерывную линию на плоскости w, то и z описывает непрерывную же линию на своей плоскости; если при этом движении w возвращается к исходной точке w_0, то и функция z возвращается к исходной точке z_0; это обусловливается однозначностью функции и непрерывностью преобразования. Замкнутому контуру на плоскости w отвечает замкнутый же контур на плоскости z.

Это свойство непрерывной однозначной функции некоторые авторы называют ее монодромностью[1]. Что это свойство однозначной функции играет основную роль в теории функций, следует уже из того, что на нем существенно основывается доказательство теоремы Коши об интеграле по замкнутому контуру. Монодромность функции z от независимой переменной w заключается в том, что при полном обходе непрерывного замкнутого контура на плоскости w мы всегда возвращаемся к исходной точке и на плоскости z.

3. Положим теперь, что соотношение (1) заменяется уравнением:

$$z^2 = w. \tag{2}$$

Теперь z также является функцией независимой переменной w, но не однозначной, а двузначной: каждому значению w отвечают два значения z, которые сливаются в одно при $w = 0$. Теперь каждой точке на плоскости независимой переменной уже отвечает не одна, а две точки на плоскости z. Двузначная функция, естественно, дает и двузначное отображение плоскости w на плоскости z. Это обстоятельство лишает нас возможности непосредственно применять к изучению двузначных и, вообще, многозначных функций комплексной переменной те геометрические методы, которые применяются к изучению однозначной функции. Если, например, мы возьмем некоторый контур на плоскости w и станем рассматривать интеграл $\int z\,dw$, взятый по этому контуру, то он не будет иметь определенного значения, ибо мы не знаем, какое значение z нужно взять в каждой точке контура w. Каза-

[1]) Термин „монодромность" принадлежит Коши. Нужно, однако, сказать, что в значениях близких друг к другу терминов „монодромность", „моногенность", „синектичность" и т. д. в настоящее время царит большая путаница. Но, насколько мы можем судить, термин „монодромность" всегда употреблялся именно в том значении, которое ему придаю в тексте.

лось бы, что возникающие в этом отношении затруднения можно устранить без труда, разбив двузначную функцию на две однозначные. Иногда это, действительно, бывает возможно в том смысле, что двузначную функцию можно разбить на две монодромные однозначные функции. Например, функция

$$z = \sqrt{e^w} \tag{3}$$

разбивается на две монодромные функции:

$$z_1 = e^{\frac{w}{2}}, \quad z_2 = -e^{\frac{w}{2}}, \tag{4}$$

где $e^{\frac{w}{2}}$, как e^w, выражается известным экспоненциальным рядом. Монодромность сохраняется здесь благодаря тому, что две функции (4) ни при каком конечном значении w не имеют общего значения. В самом деле, равенство

$$e^{\frac{w}{2}} = -e^{\frac{w}{2}}$$

не может иметь места, ибо $e^{\frac{w}{2}}$ не обращается в нуль ни при каком конечном значении w. Наша двузначная функция представляет собой как бы искусственное соединение двух несвязанных между собой монодромных однозначных функций; с такого рода случаями нам еще придется встречаться ниже.

Однако обыкновенно такое расчленение не удается в том смысле, что составляющие функции оказываются не монодромными. Мы выясним это на примерах.

4. Остановимся для этого несколько подробнее на функциональной зависимости (2).

Пусть ϱ и ω будут модуль и аргумент независимой переменной w, так что

$$w = \varrho(\cos\omega + i\sin\omega). \tag{5}$$

Тогда два значения z будут:

$$z_1 = \sqrt{\varrho}\left[\cos\frac{\omega}{2} + i\sin\frac{\omega}{2}\right]$$

и

$$z_2 = \sqrt{\varrho}\left[\cos\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right) + i\sin\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)\right] \tag{6}$$

где $\sqrt{\varrho}$ есть арифметическое значение корня.

Положим теперь $w^{(0)} = 1$; тогда $z_1^{(0)} = 1$. Представим себе, что точка w будет двигаться, как указано на фиг. 135, по окружности радиуса 1 в направлении, обратном часовой стрелке [1]), начиная со значения $w^{(0)}$; положим, что одновременно на второй плоскости перемещается соответствующая точка z, исходя от значения $z_1^{(0)}$ и *меняя это значение непрерывно*. В таком случае, когда точка w пройдет небольшую дугу ϑ и w приобретет значение $\cos\vartheta + i\sin\vartheta$, то z приобретет значение $\cos\frac{\vartheta}{2} + i\sin\frac{\vartheta}{2}$, ибо только это значение будет служить непрерывным продолжением начального значения $z_1^{(0)} = 1$; второе значение отличается весьма мало от -1 и не может служить непрерывным продолжением значения $z_1^{(0)}$. При дальнейшем движении, когда точка w пройдет дугу ω, соответствующая точка z пройдет дугу $\frac{\omega}{2}$. Когда точка w пройдет полуокружность, т. е. примет значение $w^{(1)} = -1$, то z дойдет до точки $z_1^{(1)} = i$. Когда точка w обойдет целую окружность, т. е. примет значение $w^{(2)} = w^{(0)} = 1$, то z дойдет до точки $z_1^{(2)} = -1$.

Фиг. 135.

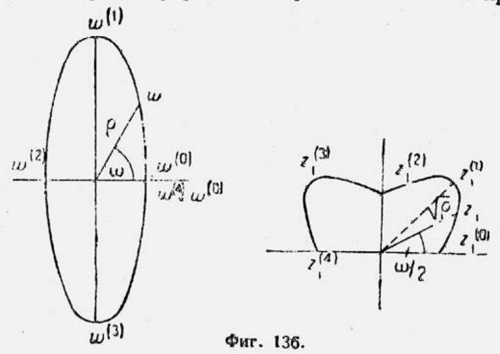
Итак, когда независимая переменная обойдет полную окружность и возвратится в точку исхода, то точка z сделает только полоборота и в точку исхода, следовательно, не возвратится. Монодромность нарушена.

Когда точка w станет продолжать свой путь по той же окружности, то точка z, непрерывно перемещаясь от значения $z^{(2)} = -1$, опишет вторую полуокружность и воз-

[1]) Мы принимаем, что в этом направлении аргумент ω возрастает; мы будем называть его, как обычно, *направлением положительного вращения*.

вратится в исходную точку лишь после того, как точка w дважды обойдет свою окружность.

5. В рассмотренном выше примере точка w обошла окружность радиуса 1. Результат будет, однако, такой же, если точка w обойдет какую угодно замкнутую кривую, внутри которой расположено начало $w = 0$. Это значит: когда точка w обойдет всю кривую и возвратится в точку исхода, то точка z опишет разомкнутую дугу. Оно и понятно: при непрерывном передвижении w по кривой



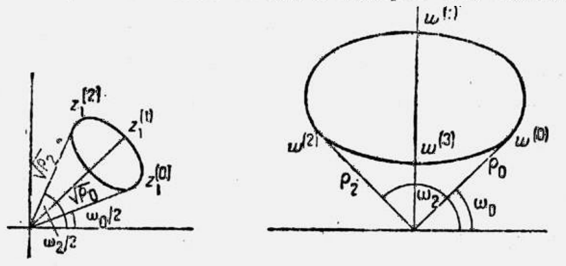
Фиг. 136.

$w^{(0)}w^{(1)}w^{(2)}w^{(3)}w^{(4)}$ (фиг. 136) точка z будет перемещаться так, что ее расстояние от начала будет равно $\sqrt{\varrho}$, а пройденное относительно положительной полуоси угловое расстояние $z^{(0)}Oz$ будет равно $\omega/2$, т. е. половине углового расстояния $w^{(0)}Ow$, пройденного точкой w. Таким образом, когда точка w возвратится в точку $w^{(4)} = w^{(0)}$ положительной полуоси, то точка z придет в точку $z^{(4)}$ на отрицательной полуоси и, следовательно, опишет разомкнутую дугу; эта дуга замкнется, когда точка w еще раз опишет ту же или другую замкнутую кривую вокруг начала.

Но дело обстоит иначе, если точка w описывает замкнутую кривую, не огибающую начала (фиг. 137). Когда точка w выходит из $w^{(0)}$, имеющей полярный угол ω_0, то точка z находится в $z_1^{(0)}$ при полярном угле $\omega_0/2$.

Когда точка w доходит до w_2, где начинается поворот, то точка z находится в $z_1^{(2)}$ при полярном угле $\omega_2/2$. Теперь вместе с радиусом-вектором точки w поворачивает в обратную сторону и радиус-вектор точки z_1; и когда w приходит в начальную точку $w^{(0)}$, то и z_1 возвращается в $z_1^{(0)}$.

6. Почему же начало играет здесь такую исключительную роль? Как обнаруживает исследование, причина заключается здесь в том, что это есть **точка разветвления**, т. е. такая точка, в которой два значения



Фиг. 137.

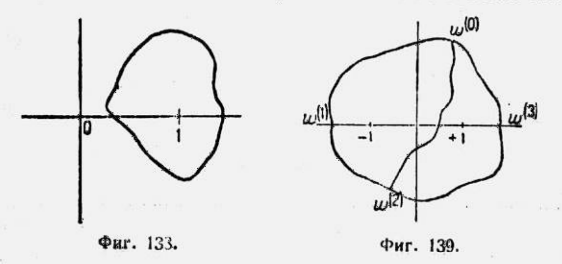
функции сливаются в одно. Кроме точек разветвления, функция может иметь еще другие особенные точки, в которых функция не имеет вовсе определенных значений или обращается в бесконечность. Во всяком случае, **если независимая переменная описывает замкнутую кривую, внутри которой вовсе нет особенных точек, то и непрерывно изменяющаяся функция описывает замкнутую кривую; но если независимая переменная обходит особенные точки, то функция может не возвратиться (и обыкновенно не возвращается) к исходному значению.** Доказательство этого предложения, а также точное установление критериев, когда функция возвращается при обходе особенной точки к первоначальному значению и когда не возвращается, составляет одну из серьезных задач теории функций, разрешенную, впрочем, до конца. Мы, конечно,

не имеем возможности останавливаться здесь подробно на этом вопросе; мы ограничимся только примером точки разветвления, при обходе которой функция возвращается к исходному значению.

Возьмем функцию:

$$z = (1 - w)\sqrt{w}, \qquad (7)$$

где радикал имеет двойное значение; она имеет две точки разветвления: $w = 0$ и $w = 1$. При $w = 1$ оба значения функции равны нулю. Эта функция представляет собой произведение двух функций: $z_1 = 1 - w$ и $z_2 = \sqrt{w}$. Первая функция однозначная и, следовательно, возвращается к исходному значению всякий раз, как независимая переменная делает полный оборот по какой бы то ни было



Фиг. 133. Фиг. 139.

замкнутой кривой; но и функция z_2, как мы уже знаем, возвращается в точку исхода, если независимая переменная делает полный оборот по кривой, не огибающей нулевой точки.

Положим теперь, что независимая переменная w обойдет кривую, огибающую точку $w=1$, но не огибающую точки $w = 0$ (фиг. 138). Так как при этом и z_1 и z_2 возвратятся к начальным своим значениям, то и произведение $z_1 \cdot z_2 = z$ возвратится к начальному значению. Заметим, что некоторые авторы вовсе не называют таких точек точками разветвления. Мы будем называть такую точку **точкой схождения**: два значения функции здесь как бы сходятся без разветвления.

7. Рассмотрим еще двузначную функцию, имеющую несколько точек разветвления, например функцию:

$$z = \sqrt{(w-1)(w+1)}. \qquad (7a)$$

Точки разветвления здесь будут, очевидно, $w = +1, w = -1$. При обходе каждой из них порознь функция переходит от одного значения к другому, т. е. меняет знак. Что будет, если функция обогнет обе точки разветвления? Легко понять, что функция возвратится к первоначальному значению. В самом деле, положим, что независимая переменная w (фиг. 139) обходит замкнутую кривую $w^{(0)}w^{(1)}w^{(2)}w^{(3)}w^{(0)}$, огибая обе точки разветвления -1 и $+1$. Соединим точки $w^{(0)}$ и $w^{(2)}$ линией, разделяющей точки -1 и $+1$. Точка w движется от $w^{(0)}$ к $w^{(1)}$, от $w^{(1)}$ через $w^{(2)}$ к $w^{(3)}$ и, наконец, обратно, к $w^{(0)}$. Ясное дело, что ничто не изменится, если точка w, прежде чем пройти дугу $w^{(2)}w^{(3)}$, пробежит дугу $w^{(2)}w^{(0)}$ и затем обратно $w^{(0)}w^{(2)}$: она придет в $w^{(2)}$ во второй раз с тем же значением функции, что и в первый раз. Теперь ясно, что замкнутый путь $w^{(0)}w^{(1)}w^{(2)}w^{(3)}w^{(0)}$ эквивалентен двум замкнутым же путям: $w^{(0)}w^{(1)}w^{(2)}w^{(0)}$ и $w^{(0)}w^{(2)}w^{(3)}w^{(0)}$; первая кривая огибает только точку разветвления -1, вторая — только точку разветвления $+1$. При каждом обходе функция меняет знак, а потому в конечном результате она возвращается к первоначальному своему значению.

8. Мы рассматривали до сих пор только двузначные функции: в точках разветвления сходились два значения этой функции; такие точки разветвления называются **точками разветвления первой кратности**. Обратимся теперь к трехзначным функциям.

Возьмем сначала простейшую функцию:

$$z = \sqrt[3]{w}. \qquad (8)$$

Если выразить снова независимую переменную w через модуль и аргумент по формуле (5), положив

$$z_1 = \sqrt[3]{\varrho}\left(\cos\frac{\omega}{3} + i\sin\frac{\omega}{3}\right), \quad z_2 = \varepsilon z_1, \quad z_3 = \varepsilon^2 z_1, \qquad (9)$$

где

$$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} \qquad (10)$$

есть один из комплексных корней 3-й степени из 1, то это и будут три значения нашей функции. Эта функция имеет точку разветвления $z=0$; в ней сходятся все три значения функции; она называется точкой разветвления второй кратности.

Если здесь радиус-вектор точки w поворачивается на небольшой угол ω, то при непрерывном изменении аргумент функции нарастает на $\frac{\omega}{3}$. При полном обходе вокруг точки разветвления аргумент начального значения увеличивается на $\frac{2\pi}{3}$; поэтому значение z_1 переходит в z_2, значение z_2 в z_3, значение z_3 в z_1. Это выражают схематически так:

$$\begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ z_2 & z_3 & z_1 \end{vmatrix}. \tag{11}$$

Если мы обойдем точку разветвления в положительном направлении 2 раза, то после первого обхода z_1 перейдет в z_2; после второго z_2 перейдет в z_3; таким образом после двух обходов z_1 перейдет в z_3. Вообще, результат двойного обхода можно схематически выразить так:

$$\begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ z_3 & z_1 & z_2 \end{vmatrix}. \tag{12}$$

9. Теперь рассмотрим функцию:

$$z=\sqrt[3]{1+w}+\sqrt{1-w}\,; \tag{13}$$

первый радикал $u=\sqrt[3]{1+w}$ имеет три значения u_1, $u_2=\varepsilon u_1$ и $u_3=\varepsilon^2 u_1$; второй радикал $v=\sqrt{1-w}$ имеет два значения v_1 и $v_2=-v_1$. Функция $z=u+v$ имеет шесть значений:

$$z_1=u_1+v_1,\ z_2=u_2+v_1,\ z_3=u_3+v_1,$$
$$z_4=u_1+v_2,\ z_5=u_2+v_2,\ z_6=u_3+v_2.$$

Функция имеет две точки разветвления $w=1$, $w=-1$. В точке $w=-1$ сливаются значения u_1, u_2, u_3; это — точка разветвления второй кратности; при ее обходе значение второго слагаемого не меняется, а u_1 переходит в u_2, u_2 — в u_3, u_3 — в u_1. Поэтому схема изменения функции z будет такая:

$$\begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ z_2 & z_3 & z_1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} z_4 & z_5 & z_6 \\ z_5 & z_6 & z_4 \end{vmatrix}. \tag{14}$$

Шесть значений функции распадаются на две тройные группы, внутри которых происходят замещения. В точке $w=1$ сливаются значения v_1 и v_2; при ее обходе v_1 переходит в v_2, а первое слагаемое возвращается к первоначальному значению. Поэтому схема замещения значений функции z будет такая:

$$\begin{vmatrix} z_1 & z_4 \\ z_4 & z_1 \end{vmatrix}\ \begin{vmatrix} z_2 & z_5 \\ z_5 & z_2 \end{vmatrix}\ \begin{vmatrix} z_3 & z_6 \\ z_6 & z_3 \end{vmatrix}. \tag{15}$$

Здесь шесть значений функции распадаются на 3 группы, по два значения в каждой, причем значения одной и той же группы замещают друг друга.

В рассмотренном примере шестизначной функции ни в одной из точек разветвления не сливаются все шесть значений функции; но в каждой точке они разбиваются на группы, причем замещение происходит внутри группы; общее же число значений, сливающихся в каждой точке разветвления группами, равно шести. Это суть точки разветвления 5-го порядка.

Вообще, точке разветвления присваивается порядок μ, если общее число значений, которые сливаются в одно значение или группами в несколько кратных значений, равно $\mu+1$.

10. В рубриках 4, 5, 7 мы рассмотрели двузначные функции, и их точки разветвления были 1-го порядка; в рубрике 8 мы рассмотрели трехзначную функцию, и ее точка разветвления была 2-го порядка. Наконец, разветвления шестизначной функции, рассмотренной в рубрике 9, были 5-го порядка. Отсюда может составиться представление, будто вообще функция, имеющая $\mu+1$ значений, может иметь только точки разветвления μ-го порядка. Однако это не так; мы в этом убедимся на следующем примере.

Положим, что z определяется в функции от w из уравнения:

$$z^3-3wz+2w=0. \tag{16}$$

Если мы обратимся к общему уравнению 3-й степени

$$z^3 + pz + q = 0, \tag{17}$$

то корни его, как известно, выражаются по формуле Кардана следующим образом.

Полагаем:

$$\left.\begin{aligned} R &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}, \\ R' &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}; \end{aligned}\right| \tag{18}$$

значения внутреннего и внешнего радикала в выражении R могут быть выбраны произвольно, а в выражении R' внутренний радикал должен иметь то же значение, что и в первом, внешний же должен быть выбран так, чтобы

$$RR' = -\frac{p}{3}. \tag{19}$$

Тогда корни уравнения (17) выразятся следующим образом:

$$z_1 = R + R',\ z_2 = \varepsilon R + \varepsilon^2 R',\ z_3 = \varepsilon^2 R + \varepsilon R', \tag{20}$$

где

$$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{2\pi}{3}.$$

Применяя эти формулы к уравнению (16), мы получим:

$$R = \sqrt[3]{w(-1 + \sqrt{1-w})} \cdot R' = \sqrt[3]{w(-1 - \sqrt{1-w})}, \tag{21}$$

$$RR' = w, \tag{22}$$

$$z_1 = R + R',\ z_2 = \varepsilon R + \varepsilon^2 R',\ z_3 = \varepsilon^2 R + \varepsilon R'. \tag{23}$$

Теперь из состава радикалов RR' мы видим, что наша трехзначная функция имеет две точки разветвления: $w = 0$ и $w = 1$. При $w = 0$ все три значения функции обращаются в нуль; это — точка разветвления 2-го порядка. При $w = 1$ имеем:

$$R' = R = \sqrt[3]{-w} = -1;\ z_1 = -2;\ z_2 = z_3 = -(\varepsilon + \varepsilon^2) = 1.$$

Таким образом $w = 1$ есть точка разветвления первой кратности; в ней сливаются только два значения функции z_2 и z_3.

Посмотрим, что происходит, когда мы обходим каждую из точек разветвления. Легко видеть, что при обходе одной точки $w = 0$ радикал R переходит в εR; в самом деле, его можно представить в виде:

$$R = \sqrt[3]{w} \cdot \sqrt[3]{-1 + \sqrt{1-w}}; \tag{24}$$

при обходе точки $w = 0$ первый радикал, как мы видели в рубрике 8, приобретает множителя ε; второй радикал возвращается к первоначальному значению, так как для него $w = 0$ точкой разветвления не служит. Поэтому радикал R переходит в εR; но в таком случае R' переходит в $\varepsilon^2 R'$, так как должно остаться в силе соотношение (22). Следовательно. при обходе точки $w = 0$ происходят следующие замещения:

$$\begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ z_2 & z_3 & z_1 \end{vmatrix}. \tag{25}$$

При обходе точки разветвления $w = 1$ происходит замещение значений z_2 и z_3 друг другом, а z_1 возвращается к первоначальному значению. Наконец, при обходе обеих точек разветвления происходит замещение точек z_1 и z_3 друг другом, а z_2 остается без изменения.

11. Теперь мы можем обратиться, собственно, к идеям Римана. Задача, которую он себе поставил, заключается в том, чтобы создать для многозначных функций геометрическое изображение, аналогичное обычному изображению однозначной функции, но только с сохранением непрерывности и монодромии.

Основная мысль, положенная в основу решения этой задачи, необычайно проста; она сводится к следующему. Положим, что нам нужно отобразить двузначную функцию, — положим функцию $z = \sqrt{w}$, рассмотренную в руб-

риках 3-й и 4-й. Для этой цели представим себе, что плоскость w заменяется двумя плоскими листами, наложенными один на другой. Каждому значению независимой переменной w отвечает по точке на каждом листе, одна точка на верхнем, другая на нижнем; эти две точки расположены непосредственно одна над другой. Если значению w на однолистной плоскости отвечает точка M, то на двулистной этому значению соответствуют две точки: M_1 на верхнем листе и M_2 на нижнем листе. Этим двум точкам мы и отнесем два значения (6) z_1 и z_2 нашей функции порознь. Иными словами, мы будем считать, что значение z_1 отвечает точке M_1, а значение z_2 — точке M_2. Теперь ясно, что двузначная функция геометрически претворена в однозначную, униформирована; это значит, что каждой отдельной точке на двулистной поверхности w (M_1 или M_2) отвечает одна определенная точка на плоскости z.

Совершенно ясно, что таким же образом для униформирования трехзначной функции придется плоскость w расщепить на 3 листа и т. д. Эти многолистные плоскости и называются римановыми поверхностями.

12. Однако эта простая идея далеко еще не решает задачи во всем ее объеме; этим достигается униформирование, но обыкновенно не достигается монодромия.

Рассмотрим функцию (3), распадающуюся на два значения (4). Будем относить значение z_1 точке M_1 и значение z_2 точке M_2. Этим цель будет достигнута вполне. Когда мы будем двигаться по непрерывной кривой на верхнем листе, то соответствующее значение функции (3) будет непрерывно изменяться, и когда мы возвратимся в точку исхода, то и $z_1 = e^{\frac{w}{2}}$ возвратится к исходному значению, ибо это есть однозначная, непрерывная (и потому монодромная) функция от w. И то же самое будет иметь место, когда мы будем перемещаться на втором листе. Здесь риманова поверхность, состоящая из двух различных листов, сполна разрешает задачу униформирования с сохранением непрерывности. Функция распадается на две непрерывные, не связанные между собою, отдельные функции. Такое распадение особенно уясняется, когда мы подойдем к вопросу с другой стороны. Положим, что мы

имеем 3 однозначные функции, непрерывные каждая во всей плоскости:

$$z_1 = f_1(w), \quad z_2 = f_2(w), \quad z_3 = f_3(w).$$

Теперь построим трехзначную функцию $z = f(w)$ таким образом, чтобы для каждого значения w первое значение функции было $f_1(w)$, второе $f_2(w)$, третье $f_3(w)$. Мы механически соединили 3 однозначные функции в одну трехзначную; естественно, что последняя может быть обратно расчленена на 3 отдельные непрерывные функции.

13. Однако такое расчленение далеко не всегда удается. Обратимся вновь к двузначной функции, которую мы рассматривали в рубрике 4. Предположим, что значения двузначной функции удалось так распределить между двумя листами плоскости w, что непрерывному передвижению по каждому листу соответствует непрерывное изменение функции z. Начнем тогда обходить некоторую замкнутую кривую, расположенную в первом листе и огибающую точку $w = 0$. Если мы выйдем из точки M_1 с начальным значением z_1, то, как мы видели в рубрике 4, из непрерывности изменения функции z следует, что по совершении полного обхода точки разветвления $w = 0$ мы возвратимся в M_1 не с исходным значением z_1, а со вторым значением z_2. Но значение z_2 не принадлежит точке M_1,— оно принадлежит точке M_2, лежащей на втором листе. Отсюда следует, что распределить между раздельными листами значения двузначной функции так, чтобы сохранить непрерывность и связанную с нею монодромию, невозможно. Коренное отличие этого случая от того, который был рассмотрен в предыдущей рубрике, состоит в том, что функция $\sqrt{e^w}$ точек разветвления не имеет, между тем как функция $\sqrt{w}$ таковую имеет ($w = 0$). Чтобы униформировать эту функцию с сохранением непрерывности, нужно принять еще другие меры — нужно установить связь между двумя листами плоскости w.

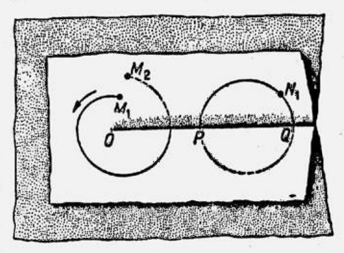
14. Это мы осуществим следующим образом. Мы представим себе два листа плоскости w лежащими непосредственно один на другом таким образом, что точки M_1 и M_2, соответствующие на обоих листах одному и тому же

значению независимой переменной w, всегда расположены непосредственно одна над другой. В точке разветвления $w = 0$ мы оба листа скрепим Мы сольем здесь две точки обоих листов в одну, и это можно сделать потому, что этой точке на одном и на другом листе отвечает одно и то же значение функции. Теперь распределим значения двузначной функции между двумя листами следующим образом: из двух значений (6) (стр. 440), отвечающих данному значению w, мы отнесем значение z_1 точке M_1 на верхнем листе, значение z_2 — точке M_2 на нижнем листе. Само собой разумеется, что мы этим еще ничего не сделали для спасения монодромии; для этого понадобилась еще одна своеобразная идея, указанная Риманом и, несомненно, составляющая в этом деле главную его заслугу.

Разрежем оба листа по одной линии, например по оси вещественных чисел, начиная с точки $w = 0$. На каждом листе по разрезу образуются два свободных края, — скажем, нижний и верхний. Теперь скрепим нижний край верхнего листа с верхним краем нижнего, как показано на фиг. 140. Оба листа теперь связаны, и точка, огибающая начало в положительном направлении, достигнув разреза, перейдет из первого листа во второй.

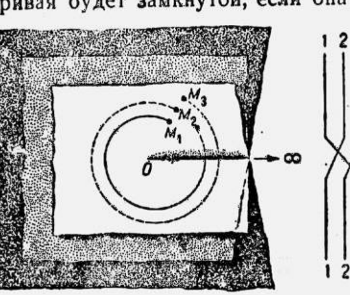
Прием, который мы применяли до сих пор, может быть осуществлен даже реально, если наши два листа сделаны, скажем, из бумаги. Дальнейшее развитие этого приема носит уже, однако, идеально геометрический характер и *реального осуществления* не допускает. Мы представим себе и верхний край первого листа скрепленным по разрезу с нижним краем второго листа; получаются два геометрических листа, проникающих один сквозь другой. Из какой бы точки M_1 верхнего листа мы ни исходили и в каком бы направлении мы ни обогнули начала, сделав полный оборот, мы возвратимся не в исходную точку M_1, а в точку M_2 нижнего листа (фиг. 140). Наоборот, если мы обойдем замкнутую кривую N_1PQN_1, не огибающую начала, то мы необходимо возвратимся в точку исхода N_1; в самом деле, такая кривая либо вовсе не пересекает разреза, либо пересекает его четное число раз и потому после полного оборота всегда возвращает нас в тот лист, из которого мы исходили. Теперь нетрудно видеть, что эта связь между листами восстанавливает монодромию. В самом

деле, если мы, исходя из точки M_1 со значением z_1, обойдем замкнутую кривую, не огибающую начала, то, как мы знаем, мы вернемся к тому же значению z_1, но в то же время придем и в ту же точку M_1. Если мы сделаем полный оборот и обогнем начало, то мы придем к значению z_2, но зато мы не возвратимся в точку M_1, а вернемся в точку M_2, которой и соответствует это значение z_2. Монодромия восстановлена благодаря тому, что кривая, которая была бы замкнутой на обыкновенной плоскости,



Фиг. 140.

может оказаться разомкнутой на двулистной римановой поверхности указанной связности. На этой поверхности кривая будет замкнутой, если она от точки M_1 приводит опять к M_1, или от точки M_2 приводит опять к M_2; но в таком *случае* она приводит к тому же значению функции, от которого исходили. Если мы обогнем начало два раза, то на двулистной плоскости *всегда* вернемся в тот же лист и в ту же точку M_1; кривая становится замкнутой и



Фиг. 141.

приводит к тому же значению функции — в полном согласии с предыдущей теорией.

Линию, по которой мы провели разрез, называют *линией разветвления*.

15. Обратимся теперь к трехзначной функции, рассмотренной в рубрике 8, имеющей одну точку разветвле-

ния $w=0$. Чтобы ее униформировать, мы расщепим плоскость w на 3 листа, которые скрепим в точке $w=0$. Теперь каждому значению w отвечает точка M_1 на первом листе, точка M_2 — на втором, точка M_3 — на третьем листе. Мы отнесем точке M_1 значение функции z_1, точке M_2 — значение z_2, точке M_3 — значение z_3, установленные равенствами (9). Теперь через точку разветвления произведем разрез и установим связность поверхности следующим образом (фиг. 141): нижний край первого листа скрепим с верхним краем второго листа, нижний край второго — с верхним краем третьего, нижний край третьего — с верхним краем первого. Если мы теперь выйдем из точки M_1 на первом листе и в положительном направлении обойдем точку разветвления один раз, то мы придем в точку M_2 на втором листе, при следующем обороте придем в точку M_3 на третьем листе и после третьего оборота возвратимся в исходную точку M_1. Так как это вполне совпадает с замещением значений (11) и (12), то монодромия восстановлена так же, как и в предыдущем случае.

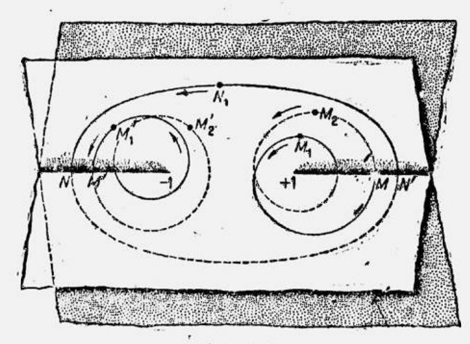
В рассмотренных двух примерах мы проводили разрез по оси вещественных чисел; но в действительности его можно провести в каком угодно направлении, лишь бы он выходил из точки разветвления и уходил в бесконечность. Для нас важно только, чтобы полный обход вокруг точки разветвления привел нас в другой лист. Разрез не должен даже необходимо иметь прямолинейную форму — его можно провести как угодно, лишь бы сохранить ту же связность листов. На следующих примерах эти рассуждения выясняются еще лучше.

16. Возьмем функцию:

$$z=\sqrt{(w-1)(w+1)},$$

рассмотренную в рубрике 7, имеющую две точки разветвления. Сообразно этому мы расщепим плоскость w на два листа, которые скрепим в обеих точках разветвления (фиг. 142); точки -1 и $+1$ отмечены через a и b. Из каждой точки проведем разрез, но только так, чтобы эти разрезы не пересекались; затем по каждому разрезу установим связь так, как это было выполнено в рубрике 14 для функции с одной точкой разветвления; но при каждом разрезе нижний край первого листа соединим с верхним

краем второго и обратно. Если мы обогнем один раз одну из точек разветвления, то перейдем из первого листа во второй, как показывают отмеченные пути. Если проследим за дальнейшим движением этих линий, то увидим, что после



Фиг. 142.

второго оборота мы возвращаемся в исходную точку. Если кривая, например, $N_1NN'N_1$, огибает обе точки разветвления, то она возвращается в исходную точку в полном согласии с указанным в рубрике ходом изменения функции. Монодромия, таким образом, сохранена.

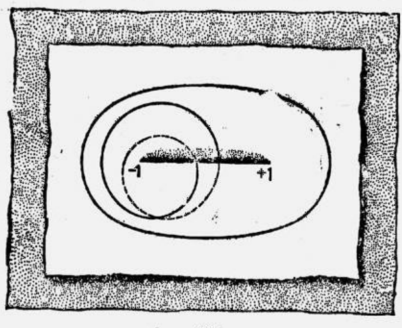
Однако того же результата можно достигнуть и иным путем. Соединим просто точки -1 и $+1$ (фиг. 143), проведем по линии $(-1, +1)$ разрез и края этого разреза соединим так, как мы их соединяли выше: верхний край первого листа с нижним краем второго, и обратно. Если теперь обогнем одну из точек разветвления, то перейдем из одного листа в другой; кривая же, огибающая обе точки разветвления, на всем своем протяжении останется в пределах одного и того же листа.

Для функции:

$$z=\sqrt{(w-a)(w-b)(w-c)}$$

сечения могут быть проведены так, как это показано на фиг. 144, где A, B и C суть изображения чисел a, b, c.

Но сечения, или линии разветвления, можно было бы провести и многими другими способами. Можно было бы провести линии разветвления из всех трех точек в бесконеч-

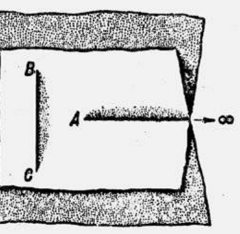


Фиг. 143.

Фиг. 145.

ность; можно соединить любые две точки разветвления, а из третьей провести сечение в бесконечность.

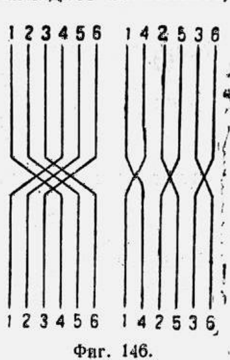
16. Обратимся теперь к более сложной функции (18), рассмотренной в рубрике 9. Здесь мы имеем 2 точки разветвления: $+1$ и -1. Функция шестизначная, и потому мы расщепим плоскость w на 6 листов. В точке разветвления $w=-1$ значения z_1, z_2, z_3 сливаются в одно, значения z_4, z_5, z_6 также сливаются в одно. Сообразно этому мы здесь скрепим листы 1, 2 и 3-й между собой, а листы 4, 5 и 6-й между собой. Через первые три листа мы проведем разрез и соединим нижний край 1-го листа с верхним краем 2-го, нижний 2-го—с верхним 3-го, нижний 3-го—с верхним 1-го. Таким же образом мы проведем разрезы через 4, 5 и 6-й листы и скрепим нижний край 4-го



Фиг. 144.

с верхним краем 5-го, нижний край 5-го — с верхним 6-го, нижний 6-го—с верхним 4-го. Эта связь схематически изображается фиг. 145. В точке $w=1$ совпадают значения 1-е с 4-м, 2-е с 5-м, 3-е с 6-м. Сообразно этому мы и скрепим 1-й лист с 4-м краями накрест, 2-й — с 5-м, 3-й — с 6-м. Схема эта двумя способами изображена на фиг. 146. Второе изображение нагляднее показывает, что листы соединены только по 2.

Нас не должно смущать, что мы скрепляем 2-й лист с 4-м, так сказать, сквозь 1-й и 3-й; мы с этим уже встречались: это соединение идеально-геометрическое, оно не осуществляется реально. Если мы теперь обогнем точку разветвления (—1), выходя из 1-го листа, то мы придем во 2-й лист; если обогнем ее еще раз, то придем в 3-й лист, а после третьего оборота возвратимся в 1-й лист. Если мы выйдем из точки на 1-м листе и обогнем обе точки разветвления, то первый разрез приведет нас во 2-й лист, отсюда при переходе через 2-й разрез мы перейдем в 5-й лист. Это вполне совпадает с ходом замещений (14) и (15).



Фиг. 146.

17. В предыдущих рубриках мы разобрали только конечные значения независимой переменной, служащие точками разветвления функции; но и бесконечное значение независимой переменной может служить точкой разветвления и вот в каком смысле.

Преобразуем в нашей функции независимую переменную, положив

$$w=\frac{1}{t}; \tag{26}$$

тогда функция $z=f(w)$ превратится в функцию:

$$z=f\left(\frac{1}{t}\right)=\varphi(t).$$

Когда t стремится к нулю, w стремится к бесконечности; если $t=0$ есть точка разветвления функции $\varphi(t)$, то гово-

рят, что $w=\infty$ есть точка разветвления функции $f(w)$; если, напротив, значение $t=0$ не служит точкой разветвления для функции $\varphi(t)$, то и $w=\infty$ не есть точка разветвления функции $f(w)$.

Рассмотрим, например, функцию (2), изученную подробно в рубрике 4. Преобразование (26) здесь дает:

$$z^2=\frac{1}{t}. \qquad (27)$$

Если здесь снова положим:

$$t=\varrho(\cos\omega+i\sin\omega),$$

то получим:

$$z^2=\frac{1}{\varrho}(\cos\omega-i\sin\omega);$$

отсюда два значения z будут:

$$z_{1,2}=\pm\frac{1}{\sqrt{\varrho}}\left(\cos\frac{\omega}{2}-i\sin\frac{\omega}{2}\right).$$

Если мы теперь, исходя из определенной точки t_0 со значением:

$$z_1^{(0)}=\frac{1}{\sqrt{\varrho_0}}\left(\cos\frac{\omega_0}{2}-i\sin\frac{\omega_0}{2}\right),$$

обойдем полную окружность вокруг точки $t=0$, то мы не возвратимся к значению $z_1^{(0)}$, а придем к значению:

$$z_2^{(0)}=-\frac{1}{\sqrt{\varrho_0}}\left(\cos\frac{\omega_0}{2}-i\sin\frac{\omega_0}{2}\right).$$

В этом мы убедимся при помощи тех же соображений, которыми мы пользовались в рубрике 4.

Итак, $t=0$ есть точка разветвления двузначной функции (27), а потому $w=\infty$ есть точка разветвления для функции (2), определяемой уравнением $z^2=w$.

Это становится особенно ясно, если мы пользуемся вместо комплексной плоскости римановой сферой. Как это делается, вкратце изложено в тексте автора. Быть может, будет полезно прибавить несколько слов для выяснения этой простой идеи. Через начальную точку S числовой плоскости (фиг. 42) проводим сферу, касающуюся плоскости в этой точке. Пусть N будет точка, диаметрально противоположная S на этой сфере,

пусть Q будет точка на числовой плоскости, служащая изображением комплексного числа w. Соединим точку N с Q; прямая NQ встретит сферу в некоторой точке P, которую мы примем за изображение того же числа w на нашей сфере. Таким образом ясно, что каждому комплексному числу w будет отвечать некоторая точка на римановой сфере; и обратно, каждая точка римановой сферы будет изображением некоторого числа w. Когда точка Q на плоскости удаляется в каком бы то ни было направлении в бесконечность, то точка P неизменно приближается к N; эта точка N является, таким образом, изображением бесконечного значения w ($w=\infty$).

На римановой сфере особенно ясно, в каком случае значение $w=\infty$ будет точкой разветвления функции. *Если при обходе точки N на римановой сфере по замкнутой кривой, внутри которой не содержится иных точек разветвления, мы всегда возвращаемся к исходному значению функций, то $w=\infty$ есть обыкновенная точка; если же при таком обходе мы иногда возвращаемся не к исходному, а к иному значению функции, то $w=\infty$ есть точка разветвления функции.*

Порядок бесконечно удаленной точки разветвления определяется совершенно так же, как и для других точек разветвления. Можно рассуждать и так: если для функции $f(w)$ значение $w=\infty$ есть точка разветвления, а при преобразовании (26) эта функция переходит в функцию $\varphi(t)$, для которой $t=0$ есть точка разветвления μ-го порядка, то для исходной функции $f(w)$ значение $w=\infty$ есть также точка разветвления μ-й кратности.

18. Итак, для функции, рассмотренной нами в рубрике 4, значение $w=\infty$ есть точка разветвления второй кратности, и в ней соединяются 2 листа римановой поверхности. Линию разветвления мы проводили из точки $w=0$ в бесконечность. С установленной нами теперь новой точки зрения эта линия разветвления соединяет две точки разветвления: $w=0$, $w=\infty$. Для других функций, имеющих большее число точек разветвления, как мы показали, линии разветвления часто можно проводить различными способами, но если мы теперь проследим все разобран-

ные выше случаи, принимая во внимание и бесконечно удаленные точки разветвления, то мы убедимся, что линия разветвления всегда соединяет 2 точки разветвления.

19. Теперь мы можем формулировать окончательно, в чем заключается идея униформизации многозначной функции.

Числовая плоскость или числовая сфера расчленяется на столько листов, сколько значений имеет функция; эти значения, так сказать, распределяются между этими листами; в точках разветвления листы скрепляются; именно, скрепляются те листы, которым отнесены значения, переходящие одно в другое при обходе этой точки разветвления. Точки разветвления соединяются линиями разветвления, по которым производятся разрезы; затем края этих разрезов скрепляются в той последовательности, которая соответствует замещению значений при обходе точки разветвления.

Здесь, естественно, возникает вопрос, всегда ли возможно так распределить линии разветвления, чтобы достигнуть униформизации функции. Это один из труднейших вопросов, решение которого привело к развитию особой дисциплины, носящей название „Analysis situs".

20. В рубрике 15 мы уже выяснили, что форма линии разветвления никакого значения не имеет; важно только, между какими точками разветвления она проходит. Нужно заметить, что между одними и теми же точками иногда проходят несколько линий разветвления; если, например, через две точки разветвления проходят четыре римановых листа, причем в обеих точках 1-й и 2-й листы скреплены между собой, а 3-й и 4-й—между собой, то между этими точками проходят две линии разветвления: по одной скреплены первые два листа, по второй—вторые два. Эти две линии разветвления могут проходить одна над другой; но они могут быть проведены и независимо одна от другой.

Положим теперь, что для некоторой функции установлена соответствующая риманова поверхность. Через все точки разветвления проведем непрерывную замкнутую линию L. Все линии разветвления сдвинем так, чтобы они располагались вдоль этой линии L. Теперь разрежем многосвязную поверхность по линии L. Она распадется на куски, в каждом из которых никаких точек разветвления уже не будет. Для значений независимой переменной w, лежащих в каждой такой области, функция однозначно определена, и соответствующие значения функции образуют некоторую область на плоскости z. Установить то разделение плоскости z, которое соответствует частям нашей многолистной поверхности, получившимся после разреза,—в этом заключается главная задача при изучении функции на римановых поверхностях. Этой задачей автор и занимается в тексте по отношению к некоторым замечательным алгебраическим функциям.

В заключение укажем, что обстоятельное изложение учения о римановых поверхностях читатель может найти в сочинении H. Weyl Die Idee der Riemannschen Fläche, Leipzig und Berlin 1913.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

Абель 129, 207, 230, 437
Аккерман 427
Аламбер, см. Даламбер
Аристотель 124
Архимед 124, 314, 327, 331, 352
Аумунд 413

Бальцер 112
Бауман 3?9
Бауэр 132
Бахман ?9, 73
Беке 430
Беллавитис 116
Беман 425
Беркган 421
Беркли 328
Бернайс 427
Бёрнсайд 132
Бернулли Даниил 308
— Иоанн 301, 323
— Яков 301
Бернштейн Ф. 75, 388
Бессель 288
Бола 115
Борель 388
Бранфорд 429
Браунмюль 263
Бриг 259, 260
Броуэр 394, 423, 425, 426
Буркгардт 33, 42, 43, 44, 51, 231, 288, 308
Бюдан 143
Бюрги 220, 221, 222

Валлис 116
Вебер 4, 5, 6, 18, 33, 42, 43, 44, 45, 51, 60, 61, 85, 131, 132, 231, 263, 274, 275, 372, 422
Вега 261
Вейерштрасс 49, 50, 121, 130, 304, 305
Вейль 423, 425, 426, 461
Вейнрейх 401
Вельштейн 60, 61, 85, 131, 231, 263, 275, 372, 422
Веронезе 326, 394
Вильбрагам 299
Виета 36
Влакк 260
Вольф Г 408
Вольф Хр. 323, 324
Вольфскель 73
Вюллнер 325

Галле 25, 434
Галуна 437
Гамильтон 14, 89, 92, 93, 96, 115
Гаммер 2?3
Ган 399, 429, 433
Ганкель 38, 86, 423
Гартенштейн 146, 149
Гаусс 58, 63, 76, 77, 86, 88, 89, 116, 129, 155, 15?, 202, 230, 231, 271, 272
Геегард 39?
Гегель 325
Гейберг 124, 256
Геттингтон 262
Гессенберг 427, 433
Гёфлер 422
Гиббс 299, 300, 301
Гильберт 18, 19, 20, 73, 326, 354, 361, 423, 426, 427
Гордан 214
Грасман 16, 89, 97
Грингилл 406
Гурса 350
Гутцмер 2, 405

Даламбер 318
Дедекинд 17, 49, 50, 309, 393 427,

Декарт 125, 143
Деламбр 271, 272
Де-ла-Валле-Пуссен 429
Д-лопиталь 323
Ден 399
Дик 143, 421
Диофант 70
Дирихле 63, 2?6, 297, 299, 304, 306, 310

Евдокс 327
Евклид 21, 47, 59, 130, 327

Жордан 429

Захариас 421
Зеегер 284
Зоммер 421

Кавальери 314, 321
Каган 4
Кант 14, 423
Кантор Георг 17, 49, 52, 306, 373, 375, 380, 382, 397, 398
Кантор Мориц 419
Каратеодори 429
Кардан 85 125, 201, 257
Катц 408, 429
Кели 101, 113, 114
Келлер 431
Кениг 434
Кеплер 313, 314
Кёрнер 408, 422
Кершенштейнер 412
Кестнер 31 117, 118, 318
Кимура 115
Клебш 130
Кобле 214
Ковалевский 322, 323
Коммерель 433
Коперник 125, 257
Коппе 220, 233
Коради 293
Коши 122, 129, 130, 2?0, 231, 304, 318, 328, 339, 350, 439
Куммер 72, 73, 74

Лагранж 127, 128, 129, 227, 229, 230, 302, 303, ?0?, 329, 330, 341, 349
Лакруа 349 350
Лейбниц 18, 31, 86, 118, 127, 301, 315, 316, 321, 322, 323, 329, 423
Ли 130
Линдеман 353, 361, 370
Литцман 407, 423
Лиувиль 382
Лорей 40?
Лоренц 105, 106
Любсен 324
Люкей 434
Люрот 24

Майкельсон 298, 299
Маклорен 318, 343
Мангольд 399
Мебиус 264, 265, 274, 275
Мейер 11
Мемке 24 145, 255, 434
Менхен 434
Меркатор 126, 220, 225, 226, 253,
Милль 423
Минковский 14, 58, 65, 105
Мольвейде 271, 272
Мольк 11
Монж 130
Муавр 156, 229, 252

Непер 125, 219, 220, 221, 259
Нетто 132
Ньютон 126, 127, 226, 253, 317, 318, 321, 342

Окань (д'Окань) 255, 434
Одлер 25
Ом 118
Островский 156

Паш 427
Пеано 16, 17, 395
Пейрбах 257
Пикар 130, 240, 241
Питискус 258, 259
Пифагор 4?
Платон 124, 180
Прингсгейм 348, 421,
Птолемей 255, 256
Пуанкаре 15
Пуассон 324

Региомонтан 256, 257
Рёссель 17, 423, 424, 425
Ретикус 257, 258
Риман 122, 130, 304, 398, 452
Розенталь 429

Рорберг 408, 409
Рудио 227, 352
Рунге 132, 140, 287, 298, 299

Серре 132, 350
Симон 6, 34, 131, 243, 330, 420, 422
Смит 403
Страттон 298, 299
Стюди 264, 272 273, 275, 430

Таннери 11, 233
Тейлор 122, 127, 227, 333, 347, 349
Тимердинг 282, 408, 420
Том 20, 32
Трейтлейн 410
Тропфке 40, 48, 131, 245, 255, 256, 419

Уайтхед 17, 424, 428, 433

Феджер 301
Фер 403, 409
Ферма 61, 70, 71, 72, 73
Фосс 420
Фреге 423, 424, 425
Фурье 143, 303, 304, 307, 310

Хинчин 73

Цейтен 124, 420
Циммерман 77

Черпак 60
Чисгольм 270, 271

Шарп 352
Шагуновский 49, 309
Шафгейтлин 323
Шельбах 331, 332
Ш нфлис 399
Шефферс 233, 287, 350
Шиллинг 434
Шиммак 3, 5, 23, 291, 333, 401, 4
Шлёмильх 350
Штекель 227, 410, 420
Штифель 219, 257
Штурм 141, 143
Шуберт 11, 261

Эйлер 86, 111, 112, 120, 127, 1 129, 227, 228, 249, 301, 303, 30 318, 3
Энестрём 419
Энрикес 85, 399
Энштейн 4, 422
Эратосфен 60
Эрмит 353, 355

Юнг В. 399
Юнг Г. (Чисгольм) 270, 271, 399

Якоби 130, 206

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Актуально бесконечно малые величины 321, 326, 327
Алгорифмический метод, см. Ряд развития C и формальная математика
Арифметизация 397, 433
Архимедова аксиома 327

Вектор 92, 97—100
Вектор 112
Воззрение внутреннее и логика 15—16
Вращение пространства 113—114

Гамма-функция 355—356
Гиперболические функции, аналогия с круговыми функциями 24 —250
Гониометрические функции, вычисление 252—253
— определение при помощи квадратур 2 4—248
— основная комплексная функция для г. ф. 249—250
— основная вещественная функция для г. ф. 250—251
— исследование с точки зрения теории функций 251—255
— применение к сферической тригонометрии 263—280
— применения к качанию маятника 280—286
— применение для выражения тригонометрических рядов 286—301, см. также Тригонометрические ряды
Графические методы нахождения вещественных корней уравнения 133—154
Группы правильных многогранников 181—186

Деление окружности, уравнение 75—85
Десятичная система 8, 12
Диагональный метод 380, 386, 389
Дискриминантная кривая квадратного и кубического уравнения, 140—142
— поверхность уравнения 4-й степени 1 9—154
Диференциалы: наивно-наглядное направление 312—316
— приближенно-математическое направление 321
— метафизическое направление 320, 321, 324—325
Доказательство невозможности, общие соображения о построении правильного семиугольника при помощи циркуля и линейки 78—85
Доказательства непротиворечивости 18—19, 35, 88, 426
Дрезденские предложения 2, 23
Дроби, обращение обыкновенных в десятичные 60—62

Идеография 17, 423
Изложение в школе дробей 44
— иррациональных чисел 55
— комплексных чисел 117—119
— законов колебания маятника 282—285
— формальных законов счета 13
— отрицательных чисел 32, 40
— понятия о функциях 307
— исчисления бесконечно-малых 330—333
— учения о степени и логарифме 215—218, 232—235
— действий над натуральными числами 7

Изложение тригонометрического решения уравнений третьей степени 201
Изложение употребления букв 10
— униформизирования двучленного уравнения логарифмами 200—201
— начал теории чисел 55—57
Измерение множества, инвариантность числа измерений 394
Индукция совершенная 15
Интегралы Фурье 310—311
Интерполяция полиномами Лагранжа 341
— полиномами Ньютона 342—345
— тригонометрическая 288—291
Интерполяционные параболы 341
Исследование математическое 312
Исторические экскурсы об:
— иррациональных числах 46—49
— мнимых числах 85—86
— отрицательных числах 36—40
— современном развитии и построении математики 119—131
— теореме Тейлора 317—349
— трансцендентности чисел e и π 352—354
— тригонометрических рядах 308—310
— тригонометрических и логарифмических таблицах 255—262
— соотношении между дифференциальным исчислением и исчислением конечных разностей 340—347
— понятии функции 301—310
— показательной функции и логарифме 218—232
— исчислении бесконечно-малых 312—330
Исчерпания метод 314
Исчисление бесконечно-малых, открытие и развитие 224 и сл.

Канторовы основные ряды, см. Основной ряд
Квадрато-радикальные выражения 81
— значение их для построения циркулем и линейкой 78
Квадрато-радикальных выражений классификация 81
Кватернионы 89—116
— скалярная часть 92
— векторная часть 92
— тензор 108, 112
— верзор 112
Количество, переход от количества к измерению 41
Комиссия германских естествоиспытателей и врачей по преподаванию математики 2, 402—403
— международная по преподаванию математики 406—409
Комитет германский по математическому и естественно-научному образованию 405
— германский по техническому образованию 406
Комплексные числа, высшие 89—91
Круговые функции, аналогия с гиперболическими функциями, см. Гониометрические функции

Лагранжа интерполяционная формула 341
Логарифмы, вычисление основания натуральных л. 225
— определение натуральных л. при помощи квадратуры гиперболы 223—224, 225
— уравнение в конечных разностях для л. 222
— исследование в теории функций 235—233
— униформизирование многозначных функций при помощи л., см. Униформизация

Мера, переход от числа к мере 41
Меранские программы 403—404
Множества непрерывных и вещественных функций 387—389
— алгебраических и трансцендентных чисел, см. также Мощность и Расположение
Мощность множества 373—390
— континуума конечного числа измерений 385
— континуума счетного числа измерений 385—386

Мощность множества всех вещественных функций 388—389
— множества всех непрерывных функций 387—388

Наглядные методы для уравнений комплексной области 188—214
Неархимедова система чисел 327
Несчетность континуума 375
Непрерывность, анализ с точки зрения теории множеств 392
Непрерывные дроби 62—77
Неприводимость в теории функций 171
— в теории чисел 79
Неприводимый случай при решении кубического уравнения 202—205
Номография 434
Нормальные уравнения правильных тел 195—214
— решение при помощи отделения корней и рядов 195—199
— решение при помощи униформизации 200—201.
— решение в радикалах 206—210
— сведение общих алгебраических уравнений к нормальным 211—214
Нормирующие кривые по классу 138—140, 145, 147
— по порядку 136, 145
Ньютонова интерполяционная формула 342—343

Области, разбиение сферы на основные области 167—171, 176—180, 181—195
Обоснование арифметики средствами наглядных представлений 15, 425—427
— формальных выводов 18—19
— логики 16, 423—425
— учения о множествах 17—18
Обоснование и применения, см. Применения и обоснование
Однородные переменные 188
Определяющие кривые, см. Нормирующие кривые
Основная теорема алгебры 155—157
Основной ряд 393
Основной ряд Кантора 393
Основные законы сложения и умножения 11, 12
— логическое обоснование 14
— непротиворечивость 18—19

Пеано кривая 395
Пифагоровы числа 67—70
Поворотное растяжение пространства 110—112
Плотное множество (всюду) 45
Подготовка преподавателей академическая 1, 9, 429
— семинарская 9
Показательная функция, определение квадратурой гиперболы 223, 234
— общая 236—238
— ряд для п. ф. 226
— исследование в теории функций 235, 236
Порог ощущения 53
Построение циркулем и линейкой 78
Правила знаков, мнимые доказательства 40—41
Приближенная математика 53—54
Прикладная математика 20, 22, 23, 45
Применения и обоснование исчисления бесконечно-малых 331—332
— учения о дробях 42—45
— иррациональных чисел 51
— мнимых чисел 86—88
— натуральных чисел 14—22
— отрицательных чисел 33—41

Принцип перманентности 38
Программы преподавания математики, см. Меранские программы
Производные 329—330
Пространство, представление 52
Простые числа, существование бесчисленного множества п. ч. 59
— таблицы 60
Психологические моменты преподавания 4, 7—9, 14, 22, 40, 41, 44, 48, 400, 426, 427
Разложение на простые множители, таблицы 60

Расположение элементов множества 390—396
Рациональность с точки зрения приближенной математики 53—54
Реорганизация преподавания математики в средней школе:
— Бадена 410
— Баварии 410—411
— Вюртемберга 409—410
— Пруссии 410—416
Реформа высшей технической школы 412—415
— преподавания математики, введение исчисления бесконечно-малых в школьное преподавание 330—338, 430—431
— роль понятия о функциях 307—308
Римановы поверхности 159—166, 438—460
— сфера 159—166
Ряды развития математики:
А — логическое направление, расщепляющее методы и дисциплины 120
В — наглядное направление, объединяющее методы 121
С — формально-алгорифмическое направление 123
Ряды Фурье, см. Тригонометрические ряды
Сеть точек 65
Сечение по Дедекинду 49—50
Словоупотребление неправильное в школе,
алгебраические числа в арифметике 33
— относительные числа 33
— основанное на недоразумении:
— алгебраически неразрешимое уравнение 210
— неприводимое уравнение 202
— корень уравнения 210
— ряд Маклорена 348
Соприкасающиеся параболы 334
— предельная форма 338
Стиль математического изложения 130
Счетность алгебраических чисел 375—378
— рациональных чисел 375
Счетность совокупности счетного количества множеств 379
Счет сокращенный 12—13
Счетные машины и формальные правила счета 24—32
Тензор 108, 112
Теорема о среднем значении в дифференциальном исчислении 319—320
— Пикара 240—241
— Ферма, великая 70—75
— Штурма, геометрический эквивалент 141
Типы расположения 397
— логические, учение о типах 425
Точка, бесконечно удаленная 159—160
— сеть т. 65
Точки разветвления 162, 166, 443
— схождения 444
Точная математика 53—54
Трансцендентность чисел e и π 352, 373
Треугольник, понятие о т. в сферической геометрии, собственные и несобственные т. 264—275
— элементарное понятие о т. у Мебиуса 264—265
— Стюди 272—273
— мембрановый 275—280
Тригонометрия сферическая, включение в многомерную, дополнительные соотношения 263—280
Тригонометрические ряды 286—301
— доказательство сходимости 296—298
— тригонометрическая интерполяция 288—291
— приближенные кривые 292—294
— поведение тригонометрического ряда в точках разрыва 298—300
— явление Гиббса 299
Тригонометрические функции, см. Гониометрические функции или Круговые функции
Трисекция угла, доказательство невозможности 172—174

Униформизация при помощи логарифмов 200—201, 239
Уравнения деления круга 76—77
— двучленные 196—198
Уравнения возвратные 78—79
— пятой степени 213
— диэдра 174—179
— тетраэдра 182—183
— октаэдра 184
— икосаэдра 181—185
— нормальные 195
Формальная математика 34, 39, 42, 50, 86,
Формула Тейлора, аналогия с интерполяционной формулой Ньютона 346—347
— остаточный член 337
Функции, множество непрерывных вещественных ф. 387—389
Функциональные шкалы на кривых данного класса 137—144
— на кривых данного порядка 136—137
Функция, понятие о ф. 301
— аналитическая 302
— произвольная 304
Функции разрывные вещественные 306
Циклометрические функции, определение их квадратурой окружности 245—246, 252
Числовая плоскость 88
Число, понятие 13, 423, 427
— пара ч. 42, 87
— шкала ч. 33, 45
Школьная математика, содержание 4—5
Эквивалентности множеств теорема 388



ГОСУДАРСТВЕННОЕ ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО

ПЕЧАТАЮТСЯ:

ВИАРДА

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Перев. с немецкого Д. А. Райкова и А. Н. Тулайкова под. ред. проф. А. О. Гельфонда.

ПИАДЖИО

КУРС ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Перев. с английского Г. М. Катто под ред. проф. В. В. Степанова.

Проф. В. Ф. КАГАН

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ИДЕИ РИМАНА.

КАРТАН

МЕТОД ПОДВИЖНОГО РЕПЕРА, ТЕОРИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ГРУПП И ОБОБЩЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Перев. с французского проф. С. П. Финикова.